МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА
САМАРСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

В.А. Антипов

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Курс лекций для студентов
дневного и заочного отделения

Самара 2005

УДК 514.18

Рецензенты:
Профессор кафедры «Инженерная графика» Самарской государственной академии путей сообщения, д.т.н. Мулюкин О.П.
Профессор кафедры «Инженерная графика» Самарской государственной академии путей сообщения, д.т.н. Морогов В.М.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарской государственной академии путей сообщения

Антипов В.А. Начертательная геометрия. Курс лекций для студентов дневного и заочного отделения, специальности 190701 – Самара: СамГАПС, 2005 – 55 с.

Настоящее издание предназначено для студентов дневного и заочного отделения изучающих дисциплину «Начертательная геометрия». Курс лекций имеет своей целью помочь студенту в освоении теоретических основ начертательной геометрии.

Изложение разделов курса построено по принципу «от простого к сложному».

Все разделы иллюстрированы чертежами и наглядными рисунками, что призвано облегчить восприятие студентами приведенного материала.

С помощью настоящего пособия студент сможет получить необходимый минимум знаний по указанному курсу, достаточный для использования при решении практических задач.

2005

ВВЕДЕНИЕ

В любой отрасли промышленности для изготовления отдельных деталей и составных частей машин создаются их геометрические (идеальные) образы, которые называются чертежами. Под чертежами понимают плоское изображение идеальных геометрических очертаний и размеров технического объекта, выполненного таким образом, чтобы можно было представить его объёмные формы.

В связи с этим у будущего инженера важно выработать и развить пространственное (объемное) «видение» плоского изображения. Это позволяет не только правильно читать и понимать плоские чертежи, но и, используя целый ряд правил и положений, грамотно их выполнять.

Все эти вопросы рассматриваются студентами вузов при изучении первой общепрофессиональной дисциплины «Инженерная графика».

Важнейшей составной частью ее является курс начертательной геометрии, который в силу его большой значимости во многих образовательных стандартах выделен в отдельную дисциплину. Изучение этого курса преследует следующие основные цели:

- ознакомить студента с различными методами проецирования предмета на плоскость для получения какого-либо изображения;
- развить пространственное представление об объёмных формах технических объектов и их составляющих частей по изображению этих объектов на плоскостях;
- сформировать и закрепить в сознании человека систему правил для решения графическими методами технических задач проектирования;
- выработать у студента предварительные навыки составления чертежей технических объектов и умение чтения чертежей.

1 ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

При изучении курса «Начертательная геометрия» приняты следующие обозначения:

1.1 Плоскости проекций:
горизонтальная — $П_1$;
фронтальная — $П_2$;
профильная — $П_3$;
дополнительная — $П_4$, $П_5$ ...
аксонометрическая — П'.

1.2 Точки: А, В, С, Д... или 1,2, 3,4 ...

1.3 Проекции точек на плоскость:
$П_1$— $A_1,B_1,C_1,Д_1$ ... или 1_1 ,2_1, 3_1 ,4_1
$П_2$ — $A_2,B_2,C_2,Д_2$ ... или 1_2 ,2_2, 3_2 ,4_2
$П_3$ — $A_3,B_3,C_3,Д_3$ ... или 1_3 ,2_3, 3_3 ,4_3
П' — А\`,В\`,С\`,Д\` ... или 1\`,2\`,3\` ,4\`

1.4 Точки на развертках: A_0, B_0, C_o, $Д_0$- - - или 1_0, 2_0, 3_0, 4_0 ...

1.5 Последовательный ряд точек: A^1, A^2, A^3, A^4 ...

1.6 Точки после преобразования чертежа: $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{B}_1, \overline{B}_2$ …

1.7 Линии: a,b,c,d...

1.8 Проекции линий на плоскость:
$П_1$— a_1,b_1,c_1,d_1 ...
$П_2$ — a_2,b_2,c_2,d_2 ...
$П_3$ — a_3,b_3,c_3,d_3 ...

1.9 Линии уровня:
горизонтальная (горизонталь) — h;
фронтальная (фронталь) — f;
профильная —p.

1.10 Координатные оси проекций:
абсцисс — x;

ординат — y;
аппликат — z.

1.11 Новые оси абсцисс, полученные при замене плоскостей проекций: x_1, x_2 ...

1.12 Аксонометрические оси координат: x`,y`,z`.

1.13 Последовательный ряд линий: a^1, a^2, a^3, a^4 ...

1.14 Прямая, проходящая через точки A и B: AB.

1.15 Плоскости (поверхности): $\Delta, \theta, \Lambda, \Sigma, \Omega$

2 ОБРАЗОВАНИЕ ПРОЕКЦИЙ. МЕТОДЫ ПРОЕЦИРОВАНИЯ

Плоский чертеж какого-либо технического объекта может состоять из нескольких изображений, по которым и создается представление об объемных формах геометрического тела. Такие плоские изображения называются проекциями рассматриваемого объекта.

Под проекцией любой точки понимают ее как бы «теневое» отображение на какой-либо плоскости. Так, если поместить материальную точку 1 между источниками света (световых лучей) 2 и какой-либо плоскостью 3 (рис. 2.1), то на этой плоскости увидим тень 4 этой точки, которую и принято называть проекцией точки.

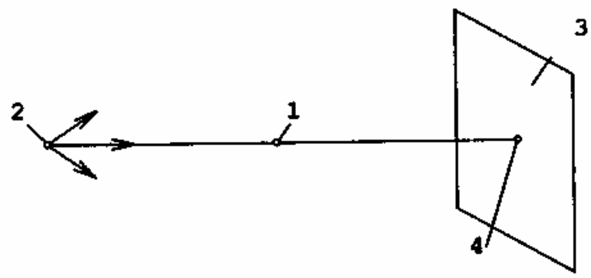


Рис. 2.1

Взаимное положение источника света и плоскости может быть произвольным. В зависимости от величины угла между лучом 2-1-4 и плоскостью 3 возможны два принципиально отличных варианта проекций точки:

- значение угла не равно 90°, тогда проекция точки называется косоугольной;
- значение угла равно 90° (прямой угол), тогда проекция называется прямоугольной, или ортогональной (от греч. orthogonios - прямо угольный).

Курс начертательной геометрии рассматривает два основных метода проецирования: центральный и параллельный.

2.1 Метод центрального проецирования

Суть метода заключается в следующем: пусть даны в пространстве треугольник **ABC,** плоскость П' и произвольная точка S (рис. 2.2). Проведя из точки S прямые линии (лучи) через вершины треугольника **ABC** до пересечения их с плоскостью П', получают точки A', B', C'. Эти точки называют центральными проекциями точек A, B, C. Соединив прямыми линиями точки A', B', C', получают центральную проекцию треугольника ABC.

Точка S называется центром проецирования, плоскость П' - плоскостью проекций, прямые SA', SB', SC' - проецирующими лучами.

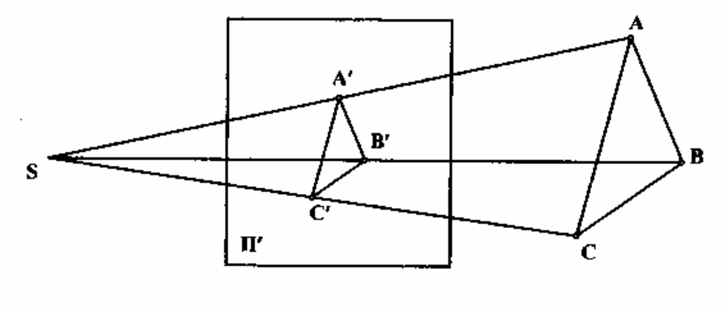


Рис. 2.2

2.2 Метод параллельного проецирования

Если точку S удалить от плоскости П' в бесконечность, проецирующие лучи будут практически параллельны между собой. Тогда они пересекутся с плоскостью проекций П' в точках А', В', С', которые называются параллельными проекциями точек А, В, С. Соединив, как и в предшествующем случае, точки А', В', С' между собой, получают треугольник А'В'С', который будет уже параллельной проекцией треугольника АВС. На рис. 2.3 стрелкой s обозначено направление проецирования.

Если направление s перпендикулярно к плоскости П', то проекция треугольника называется прямоугольной, или ортогональной.

Если направление луча s не перпендикулярно к плоскости П', то проекция треугольника называется косоугольной.

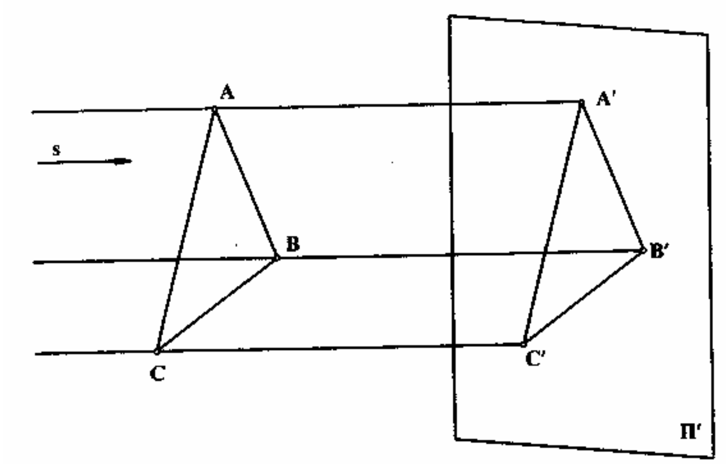


Рис. 2.3

2.3 Система плоскостей проекций в практике решения инженерных задач

Наибольшее практическое применение нашёл метод ортогонального проецирования на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций, одна из которых расположена горизонтально, а другая -вертикально. Они соответственно получили обозначения: горизонтальная плоскость проекций – $П_1$, и фронтальная — $П_2$. Эти плоскости пересекаются между собой под прямым углом, образуя линию пересечения — ось *x,* и делят пространство на четыре четверти, которые принято обозначать против хода часовой стрелки римскими цифрами I, II, III и IV (рис. 2.4). В случае недостаточной информативности об объекте по двум проекциям на указанные плоскости HI и $П_2$ используют третью плоскость $\mathbf{П_3}$**,** перпендикулярную одновременно $П_1$ и $П_2$. Она называется профильной плоскостью проекций. Плоскость **Пз** пересекается с плоскостью $\mathbf{П_1}$ образуя ось *y,* и с плоскостью $\mathbf{П_2}$**,** образуя ось *z.* Указанные плоскости делят всё пространство вокруг уже на восемь частей, которые называются октантами и обозначаются римскими цифрами от I до VIII.

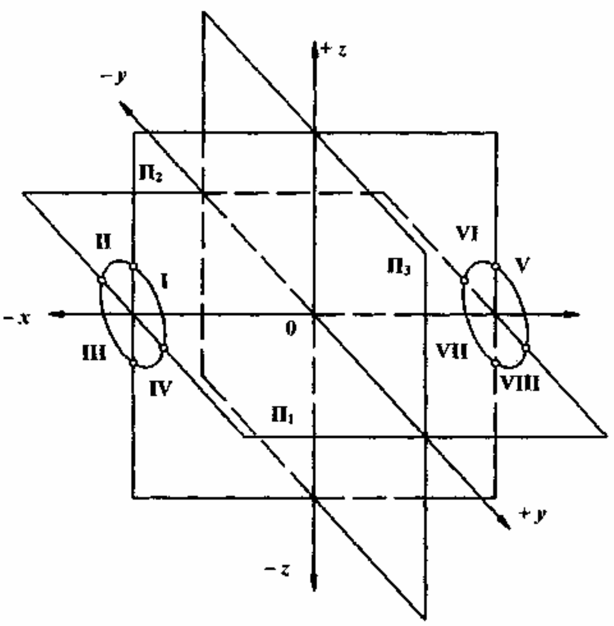


Рис. 2.4

3 ПРОЕЦИРОВАНИЕ ТОЧКИ

3.1 Проецирование точки на две и три плоскости проекций

Если поместить точку А, находящуюся в пространстве, относительно двух плоскостей проекций П, и $П_2$, опустив из нее перпендикуляры на эти плоскости, получают точки А, и A_2, которые являются ортогональными проекциями точки А относительно плоскостей проекций $П_1$, и $П_2$. Они характеризуются координатами, которые числен но равны расстоянию от точки А до соответствующих плоскостей. Координаты обозначаются теми же буквами, что и оси вдоль которых измеряется расстояние, с присвоением индекса самой буквы. Так, для точки А:

$[AAi]=[A_2A_x]=z_A$;
$[AA_2]=[A_1A,]=y_A$.

Плоскость прямоугольника $A_1AA_2A_x$, перпендикулярна к: оси *x* а линии пересечений плоскостей $П_1$ $П_2$ и плоскости $A_1AA_2A_x$ являются прямыми A_1A и A_2A_x перпендикулярными к оси x в точке A_x. Изображение точки и её проекций является пространственным чертежом, это наглядно, но не всегда удобно для практики.

Чтобы получить плоский чертёж, поворачивают плоскость $П_1$, вокруг оси *x* и совмещают её с плоскостью $П_2$ (рис. 3.1).

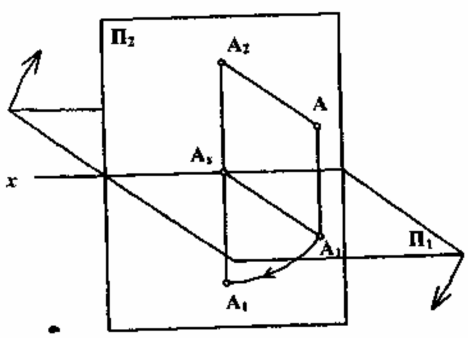


Рис. 3.1

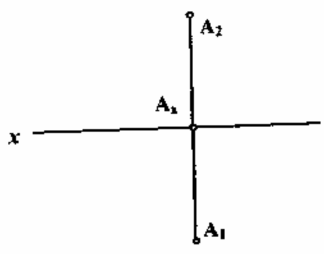


Рис. 3.2

Проекции A_1 и A_2 оказываются на одной линии, которая называется линией проекционной связи. Она перпендикулярна к оси *x* (рис. 3.2).

При проецировании точки А на три плоскости проекций от плоскости $П_3$ она отстоит на расстоянии AA_3 (рис. 3.3). При этом, аналогично вышесказанному:

$[AA_3]=[0A_x]=x_A$;

$[A_3A_2]=[AA_2]=[0A_Y]=y_A$;

$[A_3A_4]=[AA_1]=0A_Z]=z_A$.

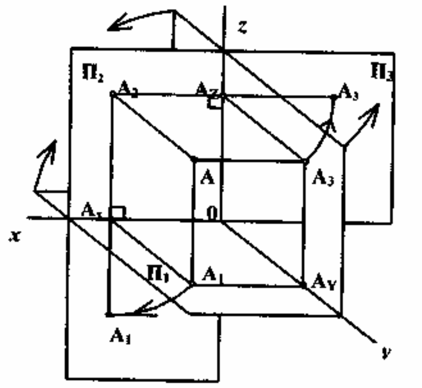


Рис. 3.3

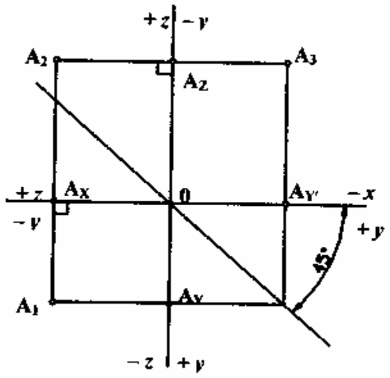


Рис. 3.4

Для получения плоского чертежа в этом случае уже две плоскости $П_1$ и $П_3$ совмещаются с плоскостью Па путём поворота их соответственно вокруг осей *x* и г. При этом ось *y* как бы раздваивается (как бы разрезается вдоль), и положение плоскостей будет таким, как показано на рис. 3.4. Профильная проекция A_3 точки А находится на пересечении линий связи $A_2A_ZA_3$ и $A]A_YA_3$ (расстояние $0A_Y=0Ay$)- Перенос точки Ау в точку A_Y- понятен из чертежа, а сам отрезок есть не что иное, как координата Y_A.

На плоском трёхмерном чертеже положительное направление оси *x* совпадает с отрицательным направлением оси *y,* а отрицательное направление оси у: - с положительным направлением оси *y.*

Это не означает, что модули этих величин обязательно равны между собой, т.е. $[[x_A]\neq[y_A]]$ (в частном случае это равенство может быть). Те же рассуждения будут справедливы и в отношении направлений осей z и у (рис. 3.4).

Таким образом, горизонтальная и фронтальная проекции точки А на плоском чертеже лежат на одной линии проекционной связи, перпендикулярной к оси x, а фронтальная и профильная проекции точки А лежат на одной проекционной линии связи, перпендикулярной к оси z.

3.2 Определение по плоскому чертежу принадлежности точки тому или другому октанту пространства

Точка, например А, принадлежит (е):

- I или V октанту, если её проекция A_1(лежит под осью *x,* а A_2 - над осью *x;*
- II или VI октанту, если и A_1 и A_2 лежат над осью *x;*
- III или VII октанту, если A_1 лежит над осью *x,* а A_2 - под ней;
- IV или VIII октанту, если и A_1 и A_2 лежат под осью *x.*

3.3 Определение по плоскому чертежу принадлежности точки плоскостям проекций

Например, точка А принадлежит:

- горизонтальной плоскости проекций $\mathbf{П_1}$ если $A_1\equiv A$, а $A_2\in$ оси *x* и $A_3\in y$;
- фронтальной плоскости проекций $П_2$, если $A_2\equiv A$, а $A_1\in$ оси *x* и $A_3\in z$;

- профильной плоскости проекций $П_{3?}$ если $A_3 \equiv A$, а $A_1 \in$ оси y и $A_2 \in$ оси z;

Любая точка лежит на оси проекций, если её смежные две проекции совпадают. Так, точка А лежит на оси *x,* если A_1 совпадает с A_2; на оси *y,* если A_2 совпадает с A_3, и оси z, если A_2 совпадает с A_3.

3.4 Правила знаков координат проекции точки

Координата *x* любой точки есть не что иное, как расстояние от этой точки до профильной плоскости проекций. Учитывая, что расстояние измеряется перпендикулярно к плоскости, на чертеже проводится ось *x.* Координата *x* положительна для точек, находящихся слева от профильной плоскости проекций $П_3$, и отрицательна для находящихся от неё справа.

Координата **x** всегда откладывается от начала координат (точка 0).

Положительное значение координаты *y* будет для точек, находящихся перед фронтальной плоскостью проекций $\mathbf{П_2}$ отрицательное - для расположенных за ней. Координату *y* можно откладывать непосредственно от оси *x* (вниз - положительное значение, вверх - отрицательное).

Положительное значение координаты г будет для точек, расположенных выше горизонтальной плоскости проекций $П_1$ а отрицательное - если точки находятся ниже $\mathbf{П_1}$ Координату z на чертеже также можно откладывать от оси x (вверх - положительное значение, вниз -отрицательное).

Если рассматривать все восемь октантов пространства, то знаки для всех трёх координат точки *(x, y,* z) приведены в табл. 3.1 и наглядно представлены на рис. 3.3 и 3.4.

Таблица 3.1

Координаты	*Октанты*							
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	+	+	+	—	—	—	—
y	+	—	—	+	+	—	—	+
z	+	+	—	—	+	+	—	—

4 ПРЯМАЯ. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ

4.1 Задание прямой в пространстве

Любая прямая в пространстве может быть задана:

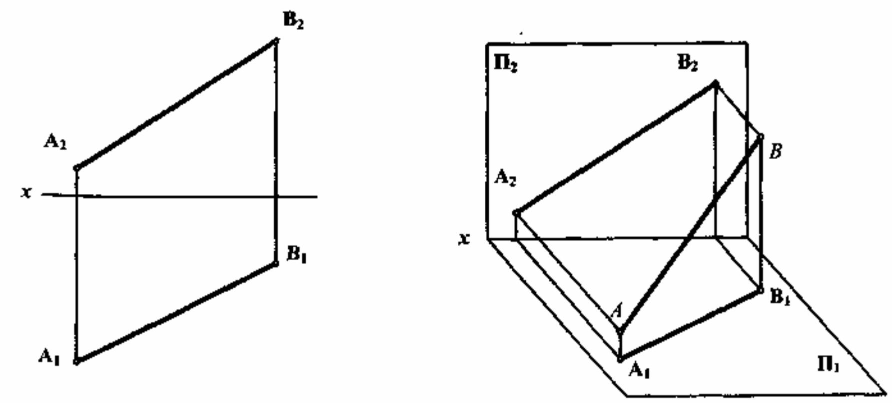
- двумя точками, принадлежащими этой прямой;
- одной точкой, принадлежащей данной прямой, и ее направлением.

В первом случае задаются координаты двух заданных точек, во втором — координаты одной точки и направление прямой.

4.2 Положение прямой в пространстве

Положение прямой в пространстве оценивается расположением ее относительно трех плоскостей проекций. При этом возможны следующие варианты.

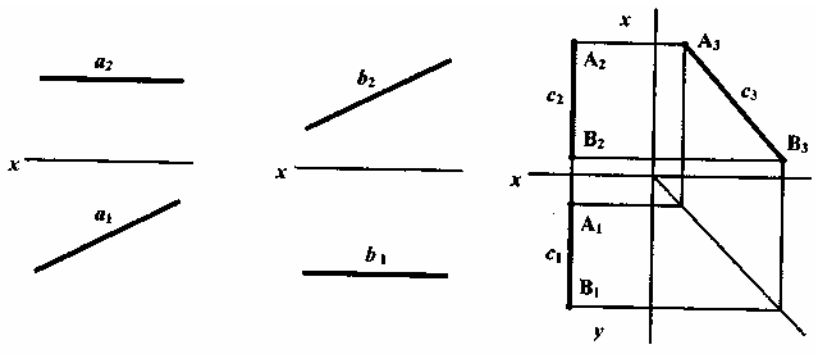
4.2.1 Прямая не параллельна ни одной из плоскостей проекций. Такую прямую называют прямой общего положения (рис. 4.1). Все точки прямой имеют различные координаты *x, y, z,* и ее проекции не параллельны осям проекций *x, y, z.*



а *б*

Рис. 4.1

4.2.2 Прямая параллельна одной из плоскостей проекций. Все точки прямой имеют одну постоянную координату x:, *y* или z. При этом одна из проекций прямой параллельна какой-то оси проекции. Такую прямую называют линией уровня (рис. 4.2).



а *б* *в*

Рис. 4.2

На рис. 4.2, *а* прямая *а* параллельна плоскости $П_1$, в этом случае ее фронтальная проекция a_2 параллельна оси *x,* координата *z* для всех точек прямой постоянна.

На рисунке 4.2, *б* прямая *b* параллельна плоскости $П_2$, в этом случае ее горизонтальная проекция a_2 параллельна оси x:, координата *у для* всех точек постоянна.

На рисунке 4.2, *в* прямая *с* параллельна плоскости $П_3$, в этом случае ее горизонтальная проекция c_1 параллельна оси *y,* фронтальная проекция c_2 параллельна оси z, координата x для всех точек прямой постоянна. Данную прямую в системе плоскостей проекций $П_2/П_1$ следует задавать проекциями отрезка АВ.

4.2.3 Прямая параллельна двум плоскостям проекций, т.е. перпендикулярна к третьей плоскости проекций. Все точки прямой имеют две постоянные координаты *x, y* или *z.* На одну из плоскостей проекций прямая проецируется в точку. Такую прямую называют проецирующей прямой (рис. 4.3).

На рис. 4.3, *а* прямая *а* параллельна плоскостям $П_2$ и $П_3$ и перпендикулярна к плоскости $П_1$. Координаты л: и *у* всех точек прямой постоянны. На горизонтальную плоскость проекции $П_1$ прямая *а* проецируется в точку.

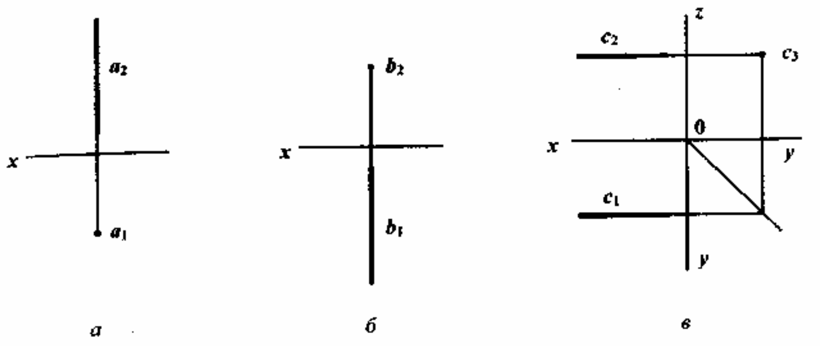


Рис. 4.3

На рис. 4.3, б прямая *b* параллельна плоскостям $П_1$ и $П_3$ и перпендикулярна к плоскости проекции $П_2$. Координаты *x* и *z* всех точек постоянны. На фронтальную плоскость $П_2$ прямая *b* проецируется в точку.

На рис. 4.3, *в* прямая *c* параллельна плоскостям $П_1$ и $П_2$ и перпендикулярна к плоскости проекции $П_3$. Координаты *y* и z всех точек прямой постоянны. На профильную плоскость $П_3$ прямая с проецируется в точку.

4.2.4 Принадлежность точки прямой

Признаком принадлежности точки прямой является принадлежность проекций точек одноименным проекциям прямой (рис. 4.4).

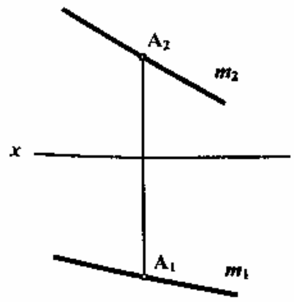


Рис. 4.4

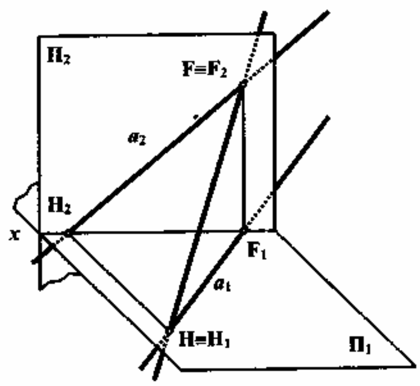


Рис. 4.5

Точка А принадлежит прямой *m,* так как одноименные проекции точки А расположены на одноименных проекциях прямой *m* ($A_1 \in m_1, A_2 \in m_2$).

4.3 Следы прямой

Следом прямой называется точка пересечения прямой с плоскостью проекции. Горизонтальным следом прямой называют точку пересечения прямой с горизонтальной плоскостью проекций (рис. 4.5). Горизонтальный след обозначают буквой Н. При этом координата г точки Н равна нулю. Следовательно, для нахождения горизонтального следа прямой на ней определяют точку Н с нулевой координатой *z* (рис. 4.5).

Фронтальным следом прямой называют точку пересечения прямой с фронтальной плоскостью проекции (рис. 4.5). Обозначают фронтальный след буквой F. Координата *y* точки F равна нулю. Следовательно, для нахождения фронтального следа F прямой на ней определяют точку, имеющую нулевую координату *y.*

Профильным следом прямой называют точку пересечения прямой с профильной плоскостью проекции. Обозначают профильный след буквой Р. Координата *x* точки Р равна нулю.

Пересекая плоскости проекции, прямая переходит из одной четверти пространства в другую. Линия общего положения может пройти через три четверти пространства; линия уровня и проецирующая линия — через две четверти.

4.4 Длина отрезка прямой и углы наклона прямой к плоскостям проекции

Отрезок прямой, параллельной какой-либо плоскости проекции, проецируется на данную плоскость без искажения (в натуральную величину) (рис. 4.6).

Так, отрезок АВ параллелен плоскости $\mathbf{П_1}$ (рис. 4.6, *а),* следовательно, длина отрезка равна его горизонтальной проекции A_1 B_1. Угол β между осью *x* и горизонтальной проекцией отрезка определяет угол наклона отрезка АВ к плоскости $П_2$.

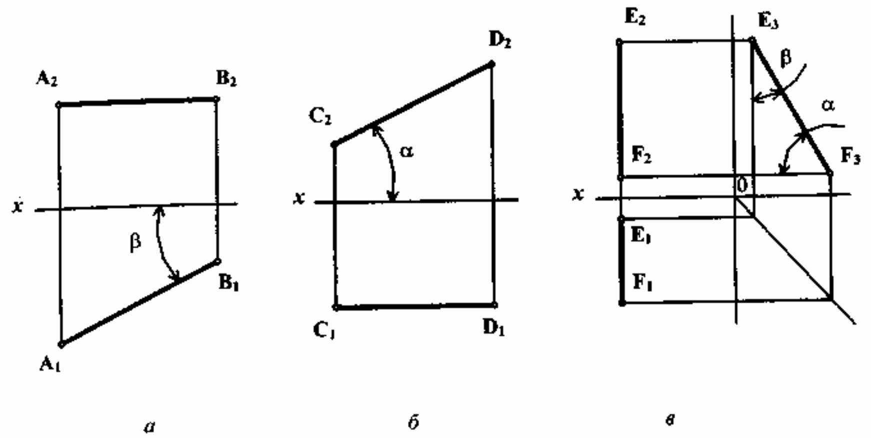


Рис. 4.6

Отрезок CD параллелен плоскости $\mathbf{П_2}$ (рис. 4.6, *б),* следовательно, длина отрезка равна его фронтальной проекции $\mathbf{C_2D_2}$**.** Угол а определяет угол наклона отрезка CD к плоскости $П_1$**.**

Отрезок **EF** параллелен плоскости **Пз** (рис. 4.6, в), следовательно, длина отрезка равна его профильной проекции $\mathbf{E_3F_3}$**.** Углы наклона отрезка к плоскостям $П_г$ и $П_2$ определяют соответственно углы α и β .

Если отрезок не параллелен плоскостям проекции, то для определения натуральной величины его и угла наклона к плоскости проекции необходимо выполнить дополнительные построения: построить вспомогательный прямоугольный треугольник, один катет которого равен проекции отрезка на плоскость $\mathbf{П_1}$ или $П_2$, а другой - разности удалений концов отрезка от той плоскости, на которой строится треугольник (рис. 4.7).

Один катет вспомогательного треугольника равен горизонтальной проекции отрезка $\mathbf{A_1}$ $\mathbf{B_1}$ а другой – B_1 B_0 - разности координат z концов отрезка (точек А и В). Гипотенуза $\mathbf{A_1B_0}$ определяет действительную Длину отрезка АВ. Угол а при вершине A_1 определяет угол наклона отрезка АВ к плоскости $П_1$.

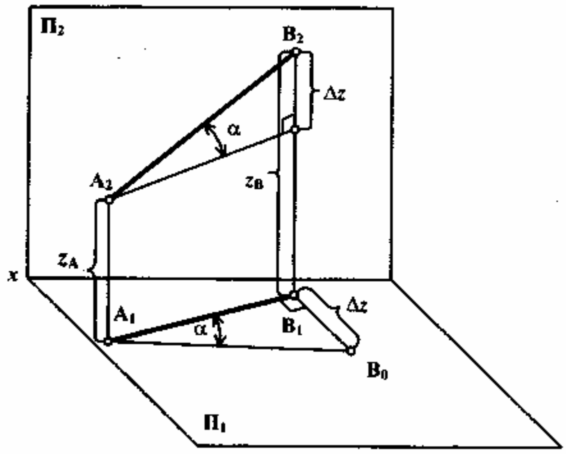


Рис. 4.7

Теорема о проецировании прямого угла. Для того чтобы прямой угол проецировался в виде прямого угла, необходимо и достаточно, чтобы, по крайней мере, одна его сторона была параллельна плоскости проекции, а вторая сторона не перпендикулярна к ней (рис. 4.10).

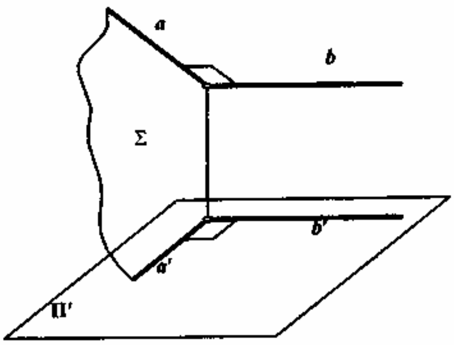


Рис. 4.10

4.5 Взаимное положение прямых в пространстве

Две прямые в пространстве могут быть параллельными, пересекающимися или скрещивающимися. Если две прямые параллельны, то их одноименные проекции взаимно параллельны (рис. 4.8). Если две прямые пересекаются, то точки пересечения одноименных проекций принадлежат одной линии связи (рис. 4.9). В частном случае пересекающиеся прямые могут быть перпендикулярными.

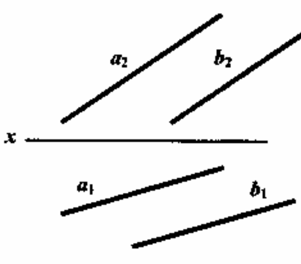


Рис. 4.8

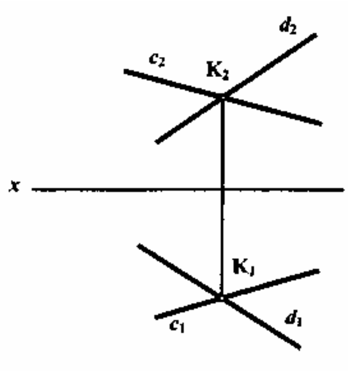


Рис. 4.9

Дано:

$a \perp b$ *;* плоскость П`, b||П`

Доказать, что $a' \perp b'$.

Для доказательства через прямые a' и a вводится дополнительная плоскость Σ. Прямая *b* перпендикулярна к плоскости Σ и параллельна проекции прямой *b'.* Отсюда прямая *V* тоже перпендикулярна к плоскости Σ.

Прямая *a'* принадлежит плоскости Σ, следовательно, *a'* перпендикулярна к *b',* т.е. прямой угол проецируется без искажения.

Если две прямые не параллельны и не пересекаются, т.е. не лежат в одной плоскости, то они являются скрещивающимися (рис. 4.11).

Взаимное положение двух прямых при наличии профильной прямой устанавливается по третьей проекции или каким-либо иным способом. На рис. 4.12 изображены две скрещивающиеся прямые, хотя их горизонтальные и фронтальные проекции пересекаются, а профильные — параллельны между собой.

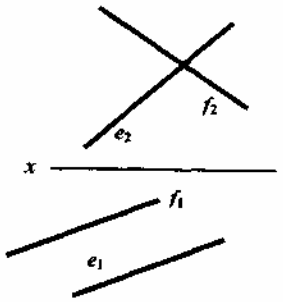


Рис. 4.11

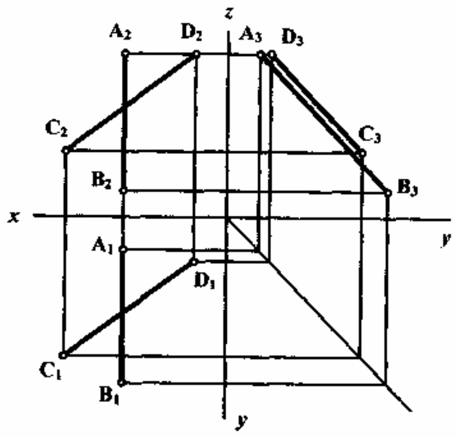


Рис. 4.12

5 ПЛОСКОСТЬ

5.1 Задание плоскости

Плоскость задается тремя произвольными точками, не принадлежащими одной прямой. Плоскость в пространстве можно задать:

- тремя точками, не лежащими на одной прямой (рис. 5.1, *а);*
- прямой и не принадлежащей ей точкой (рис. 5.1, б);
- двумя пересекающимися прямыми (рис. 5.1, в);
- двумя параллельными прямыми (рис. 5.1, г);
- любой плоской фигурой (рис. 5.1, (3).

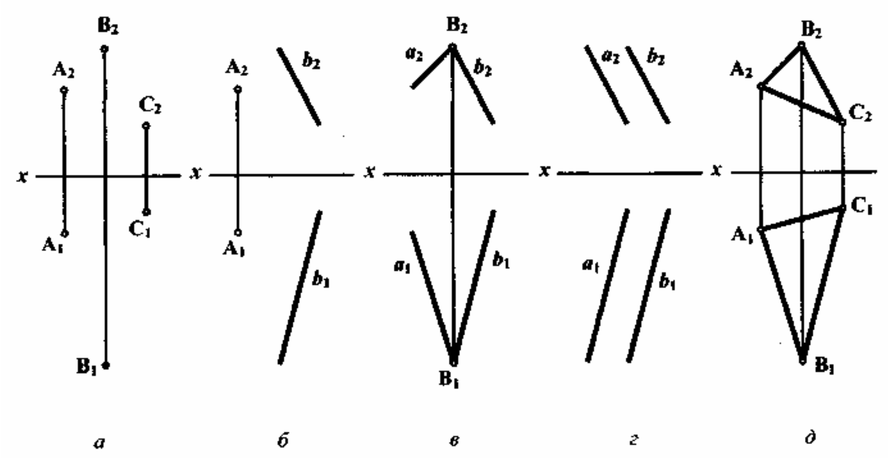


Рис. 5.1

Каждый из перечисленных способов задания плоскости допускает переход к любому другому, т.к. положение прямой в плоскости определяется двумя ее точками или одной точкой и направлением этой прямой.

Часто применяется способ задания плоскости с помощью прямых линий (взаимно пересекающихся или параллельных), по которым данная плоскость пересекается с плоскостями проекций $П_1$ **$П_2$, Пз -**Это задание плоскости следами сохраняет наглядность изображения (рис. 5.2).

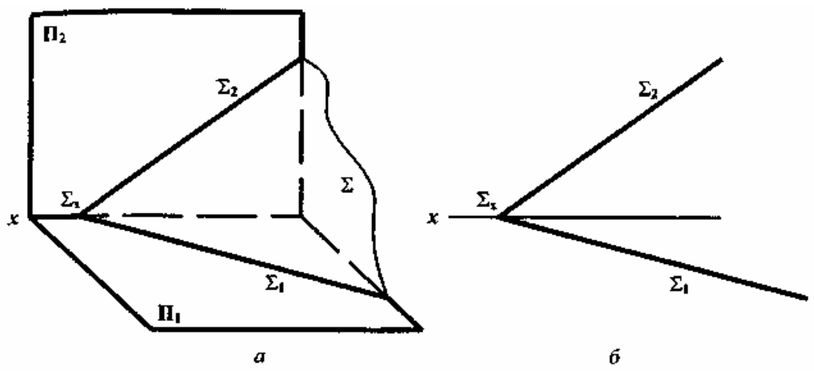


Рис. 5.2

5.2 **Следы плоскости**

Линия пересечения рассматриваемой плоскости с плоскостью проекций *(***$П_1$, $П_2$, $П_3$)** называется следом плоскости. Иными словами, след плоскости — прямая, лежащая в плоскости проекций. Следу присваивается наименование той плоскости проекций, которой он принадлежит. Например, горизонтальный след получен при пересечении заданной плоскости с плоскостью $П_1$ и обозначается Σ_1, фронтальный — с плоскостью **$П_2$** *(Σ_2),* профильный — с плоскостью **$П_3$** (Σ_3). Два следа одной и той же плоскости пересекаются на оси проекции в точке, называемой точкой схода следов. Каждый из следов плоскости совпадает со своей одноименной проекцией, остальные проекции оказываются лежащими на осях. Например, горизонтальный след плоскости £ (рис. 5.2) совпадает со своей горизонтальной проекцией Σ_1, фронтальная его проекция находится на оси Jt, а профильная на оси *у.* По расположению следов плоскости можно судить о положении данной плоскости в пространстве относительно плоскостей проекций **$П_1$,$П_2$, $П_3$.**

5.3 **Положение плоскости относительно плоскостей проекций**

Любая, произвольно взятая в пространстве, плоскость может занимать общее или частное положение. Плоскостью общего положения называется плоскость, которая не перпендикулярна ни к одной из плоскостей проекций (см. рис. 5.2). Все остальные плоскости (кроме плоскостей проекций) относятся к плоскостям частного положения подразделяются на проецирующие плоскости и плоскости уровня. |Проецирующей называется плоскость, перпендикулярная к одной из плоскостей проекций. Например, горизонтально-проецирующая плоскость $\Sigma(\Sigma_1\Sigma_2)$ перпендикулярна к горизонтальной плоскости проекции $\mathbf{П_1}$ (рис. 5.3).

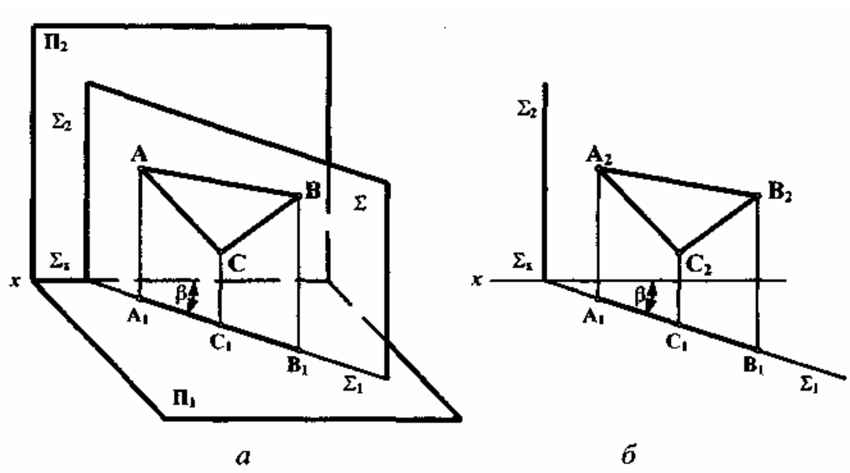


Рис. 5.3

Горизонтальные проекции всех геометрических образов (точек, прямых, фигур), лежащих в этой плоскости, совпадают с горизонтальным следом Σ_1. Угол β, который образуется между плоскостями Σ и $П_2$, проецируется на $П_1$ без искажения. Фронтальный след Σ_2 перпендикулярен к оси x. Фронтально-проецирующая плоскость $\Delta(\Delta_1,\Delta_2)$ перпендикулярна к фронтальной плоскости $П_2$ (рис. 5.4).

Фронтальные проекции всех геометрических образов (точек, прямых, фигур), лежащих в этой плоскости, совпадают с фронтальным следом плоскости Δ_2. Угол α, который образуется между заданной плоскостью Δ и $П_1$, проецируется на $П_2$ без искажения. Горизонтальный след плоскости Δ_1 перпендикулярен к оси x.

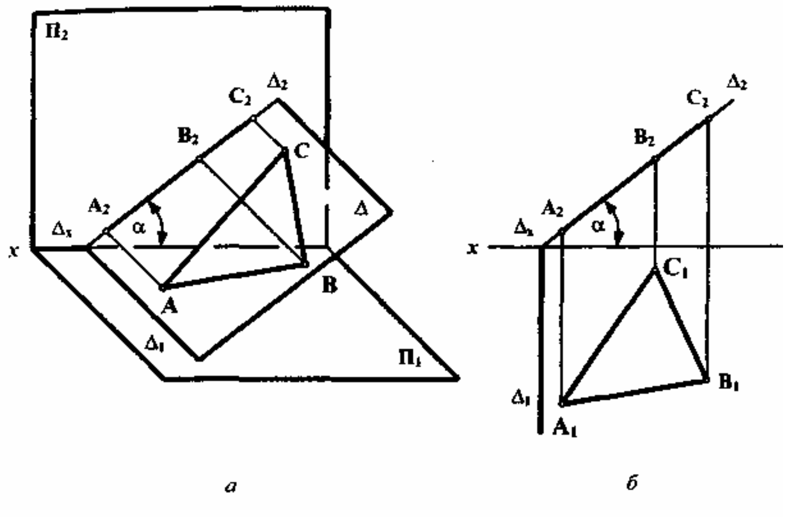


Рис. 5.4

Профильно-проецирующая плоскость T (T_1, T_2) перпендикулярна к профильной плоскости проекции $П_3$ (рис. 5.5).

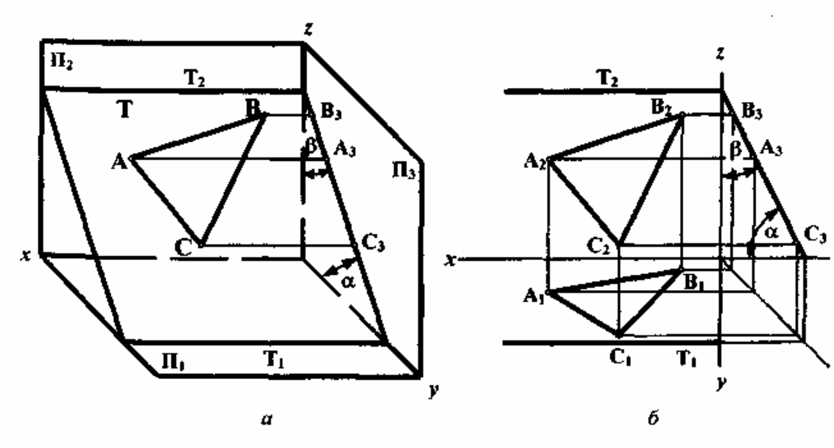


Рис. 5.5

Профильные проекции всех геометрических образов (точек, прямых, фигур), лежащих в этой плоскости, совпадают с профильным

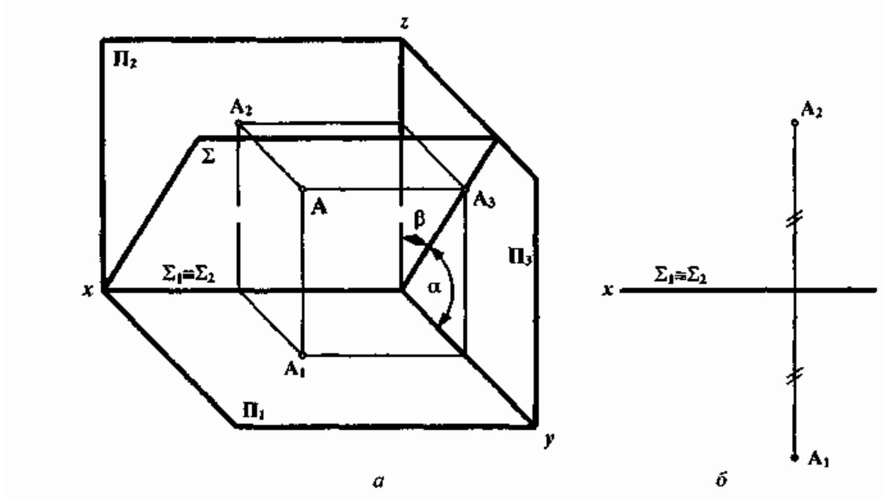


Рис. 5.6

следом плоскости **T3.** Углы α и β, которые образуются между заданной плоскостью и плоскостями проекций **П1 П2** (α°= **T^П1;** β°= **T^П2),** проецируются на плоскость **П3** без искажений. Горизонтальный и фронтальный следы плоскости параллельны оси *x.*

Профильно-проецирующая плоскость может проходить через ось х: (рис. 5.6).

Следы этой плоскости $\Sigma_1 = \Sigma_2$ совпадают друг с другом и с осью х, поэтому не определяют положение плоскости. Необходимо кроме следов задать в плоскости точку (рис. 5.6). В частном случае эта плоскость может быть биссекторной плоскостью. Угол $\alpha^\circ = \beta^\circ$, а точка А равноудалена от плоскостей проекций **П1 П2.**

Плоскостью уровня называется плоскость, перпендикулярная одновременно к двум плоскостям проекций и параллельная третьей. Таких плоскостей три разновидности (рис. 5.7):

- горизонтальная плоскость уровня перпендикулярна к $П_2$, $П_3$ и параллельна ***П1*** (рис. 5.7, *а);*
- фронтальная плоскость уровня перпендикулярна к П1 $П_3$ и параллельна **П2** (рис. 5.7, *б);*
- профильная плоскость уровня перпендикулярна к П1 $П_2$ и параллельна **П3** (рис. 5.7 в).

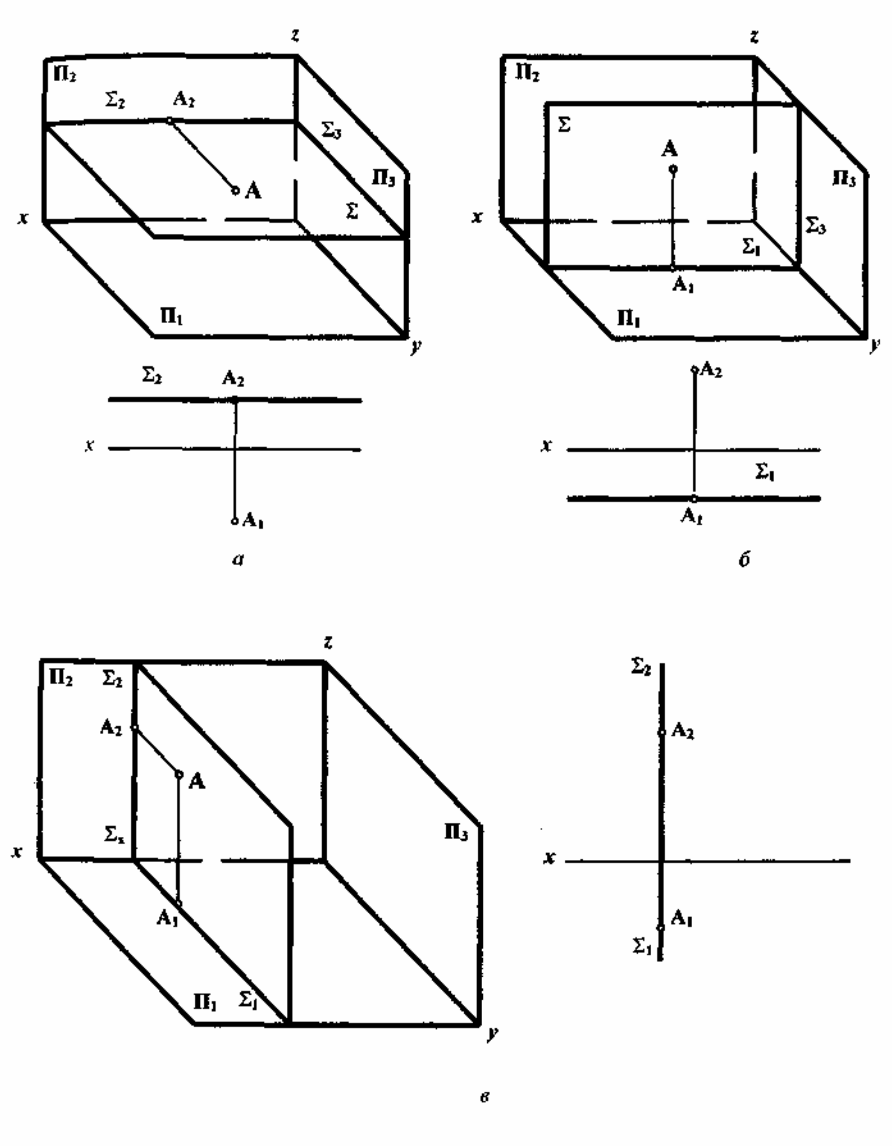


Рис. 5.7

Из определения плоскостей уровня следует, что одна из проекций точки, линии, фигуры, принадлежащих этим плоскостям, будет совпадать с одноименным следом плоскости уровня, а другая проекция будет натуральной величиной этих геометрических образов.

5.4. Признаки принадлежности точки и прямой плоскости

Для определения принадлежности точки и прямой плоскости, расположенной в пространстве, следует руководствоваться следующими ' положениями:

- точка принадлежит плоскости, если через нее можно провести линию, лежащую в плоскости;
- прямая принадлежит плоскости, если она имеет с плоскостью хотя бы две общие точки;
- прямая принадлежит плоскости, если она проходит через точку данной плоскости параллельно прямой, принадлежащей этой плоскости.

Через одну точку на плоскости можно провести бесконечное множество линий. Это могут быть произвольные линии и линии, занимающие особое положение по отношению к плоскостям проекций **$П_1$ $П_2$, $П_3$.** Прямая, принадлежащая рассматриваемой плоскости, проведенная параллельно горизонтальной плоскости проекций, называется горизонталью плоскости.

Прямая, принадлежащая рассматриваемой плоскости, проведенная параллельно фронтальной плоскости проекций, называется фронталью плоскости.

Горизонталь и фронталь являются линиями уровня.

Горизонталь плоскости следует начинать строить с фронтальной проекции, т.к. она параллельна оси x, горизонтальная проекция горизонтали параллельна горизонтальному следу плоскости.

А так как все горизонтали плоскости параллельны между собой, можно считать горизонтальный след плоскости нулевой горизонталью (рис. 5.8).

Фронталь плоскости следует начинать строить с горизонтальной проекции, т.к. она параллельна оси x, фронтальная проекция фронтали параллельна фронтальному следу. Фронтальный след плоскости -нулевая фронталь. Все фронтали плоскости параллельны между-собой (рис. 5.9).

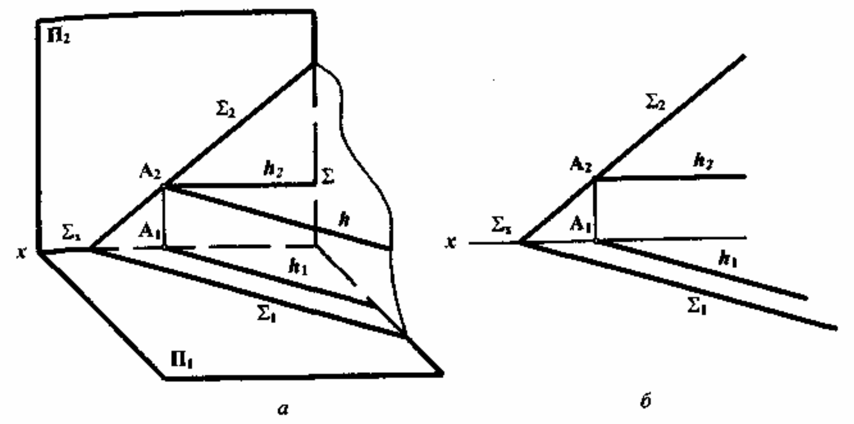


Рис. 5.8

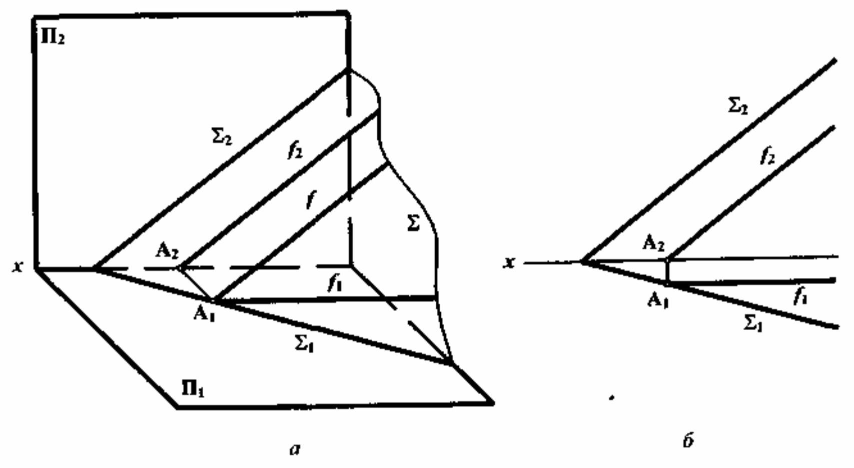


Рис. 5.9

К линии уровня относится и профильная прямая, лежащая в заданной плоскости и параллельная Π_3.

К главным линиям особого положения в плоскости, кроме линии уровня, относятся линии наибольшего наклона плоскости к плоскости проекций.

5.5. **Определение угла наклона плоскости к плоскостям проекций**

Плоскость общего положения, расположенная в пространств произвольно, наклонена к плоскостям проекций. Для определения в личины двухгранного угла наклона заданной плоскости к какой-либо плоскости проекции используются линии наибольшего наклона плод кости к плоскости проекций: к Π_1 - линия ската, к Π_2 - линия наибольшего наклона плоскости к плоскости *Π_2*.

Линии наибольшего наклона плоскости - это прямые, образующие с плоскостью проекций наибольший угол, проводятся в плоскости перпендикулярно к соответствующей линии уровня. Линии наибольшего наклона и ее соответствующая проекция образуют линейны угол, которым измеряется величина двухгранного угла, составленное! данной плоскостью и плоскостью проекций (рис. 5.10).

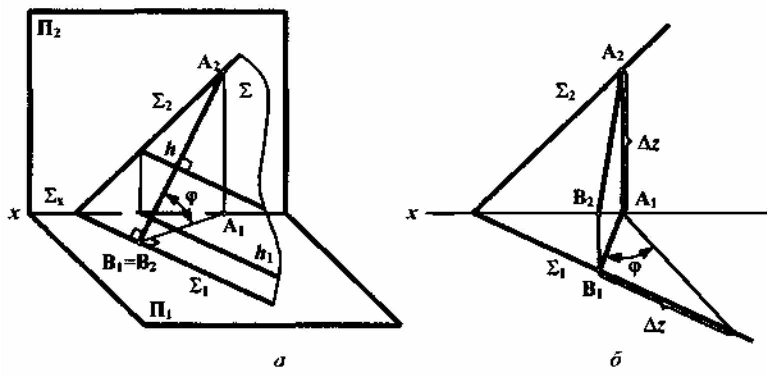


Рис. 5.10

6 ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ

Две произвольные плоскости в пространстве по отношению друг к другу могут занимать два положения:

- плоскости пересекаются, при этом линия их пересечения всегда прямая;
- плоскости параллельны друг другу.

6.1 Условия пересечения плоскостей

Две произвольные плоскости в пространстве пересекаются по прямой линии. Как известно, две точки вполне определяют единственную прямую в пространстве. Следовательно, задача по построению линии пересечения плоскостей сводится к определению положения двух принадлежащих им обеим точек. Прямая пересечения плоскостей может быть построена и при условии, если определена одна общая для плоскостей точка и известно направление этой линии.

6.2 Условия параллельности плоскостей

Две плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости:

- если плоскости заданы пересекающимися прямыми, то они будут параллельны в случае, когда одноименные проекции прямых, лежащих в разных плоскостях, будут параллельны;
- если плоскости заданы линиями уровня (фронталями и горизонталями), то они будут параллельны в случае, когда одноименные проекции линий уровня параллельны между собой;
- если плоскости заданы следами, то они параллельны тогда, когда параллельны их одноименные следы;
- если плоскости заданы любым другим способом, то в них необходимо построить пересекающиеся прямые (общего положения, уровня или следы) и сравнить одноименные их проекции. У параллельных плоскостей одноименные проекции пересекающихся прямых взаимно параллельны.

7 ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ ИПЛОСКОСТИ

7.1 Определение взаимного положения прямой линии и плоскости

Прямая линия и плоскость в пространстве относительно друг друга могут занимать следующие положения:

- прямая линия параллельна плоскости (частный случай — прямая лежит в плоскости);
- прямая линия пересекается с плоскостью (частный случай —прямая перпендикулярна к плоскости).

Иногда на чертеже нельзя непосредственно установить положение прямой линии *m* и плоскости Σ (рис. 7.1).

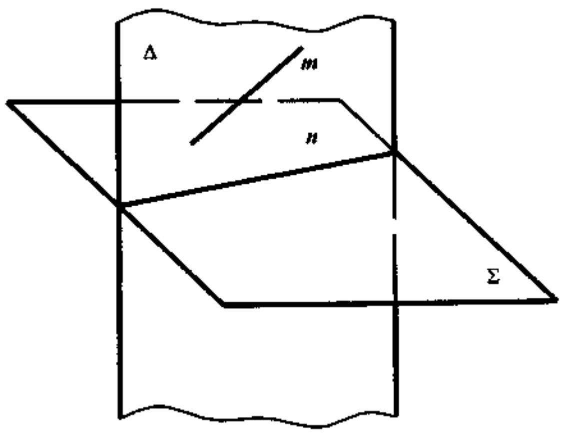


Рис. 7.1

В этом случае прибегают к некоторым вспомогательным построениям. В результате данных построений от вопроса о взаимном положении прямой линии и плоскости переходят к вопросу о взаимном положении двух прямых линий. В задачах этого типа используют метод вспомогательной плоскости. Заключается он в следующем:

- через данную прямую *m* проводят вспомогательную плоскость Δ. Подбор вспомогательной плоскости производится таким образом, чтобы решение задачи было наиболее простым;
- строят линию я пересечения плоскостей - заданной Σ и вспомогательной А;
- устанавливают взаимное положение прямой *m* и линии пересечения плоскостей *n.*

При этом возможны следующие случаи:

- прямая *m* параллельна прямой я, следовательно, прямая *m* параллельна плоскости Σ;
- прямая *m* пересекает прямую я, следовательно, прямая *m* *пересекает* плоскость Σ.

7.2 **Пересечение прямой линии и плоскости**

Если одна из пересекающихся фигур занимает проецирующее положение, то точка пересечения находится значительно проще.

7.2.1 **Задание:** найти точку пересечения прямой *m* с проецирующей плоскостью Σ (рис. 7.2).

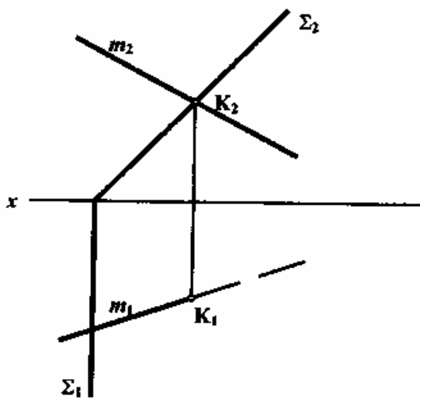


Рис. 7.2

Решение: проанализировав чертеж, легко заметить, что плоскость Σ занимает проецирующее положение (плоскость Σ перпендикулярна к плоскости $П_2$.)

Сразу определяется фронтальная проекция $\mathbf{K_2}$ точки пересечения прямой *m* с плоскостью S. Горизонтальная проекция $\boldsymbol{K_1}$ искомой точки находится с помощью линии связи на горизонтальной проекции прямой m_1. На плоскость $\mathbf{П_2}$ плоскость Σ проецируется в линию, совпадающую с фронтальным следом Σ_2, значит, прямая видима по обе стороны от следа Σ_2.

При определении видимости прямой на горизонтальной проекции необходимо установить, какой участок прямой находится над плоскостью Σ, т.е. будет видимым на горизонтальной проекции. Таким участком является луч, расположенный левее точки К.

7.2.2 **Задание:** найти точку пересечения проецирующей прямой *m* с плоскостью Σ (АВС) (рис. 7.3).

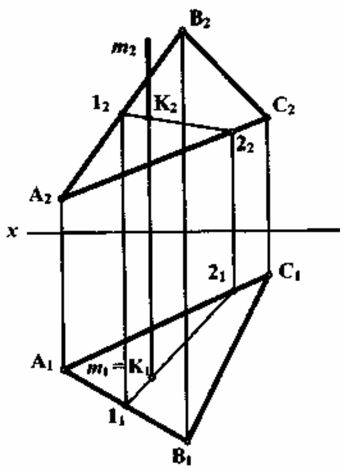
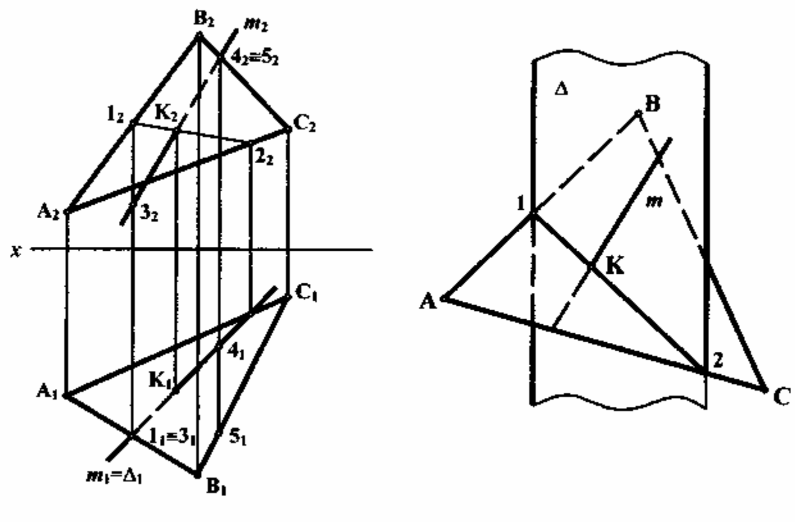


Рис. 7.3

Решение: из чертежа видно, что плоскость, заданная треугольником **АВС,** занимает общее положение относительно плоскостей проекции, прямая *m* является горизонтально проецирующей, $m \perp П_1$.Сразу определяется горизонтальная проекция $\mathbf{K_1}$ искомой точки пересечения прямой *m с* плоскостью Σ. Для нахождения фронтальной проекции K_2 точки в плоскости треугольника АВС проводится вспомогательная прямая 1-2. В пересечении её фронтальной проекции 1_1-2_2 с фронтальной проекцией прямой *m* находят фронтальную проекцию K_2 искомой точки К.

7.2.3 **Задание:** найти точку пересечения прямой *m* общего положения с плоскостью общего положения Σ (АВС) (рис. 7.4).



а *б*

Рис. 7.4

Решение: в данной задаче прямая *m* и плоскость Σ занимают общее положение относительно плоскостей проекции. Задача решается по следующей схеме:

- прямую *m* заключают в плоскость Δ. В данной задаче $\Delta \perp \Pi_1$, то есть является горизонтально проецирующей;
- находят линию 1-2 пересечения плоскостей Σ (ABC) и Δ;
- определяют точку К пересечения прямой *m* с плоскостью Σ в пересечении прямых *1-2 и m.*

Видимость прямой *m* относительно плоскости S определяется с помощью конкурирующих точек.

Для определения видимости на горизонтальной проекции выбирается пара точек 1 и 3. У этих точек координаты *y* одинаковы $(y_1 = y_3)$, координаты *z* различны $(z_1 > z_3)$, точка 1 выше точки 3.

Следовательно, на горизонтальной проекции левее точки $\mathbf{K_1}$ прямая *m* находится под плоскостью треугольника ABC, то есть должна быть проведена штриховой линией.

Для определения видимости на фронтальной проекции можно воспользоваться парой точек 4 и 5 и рассмотреть их аналогично паре точек 1 и 3.

7.3 **Параллельность прямой и плоскости**

Прямая и плоскость параллельны, если в плоскости имеется прямая, параллельная заданной прямой.

7.3.1 **Задание:** построить проекции прямой, проходящей через точку А и параллельной прямой *m,* принадлежащей плоскости Σ **(BCD)** (рис. 7.5).

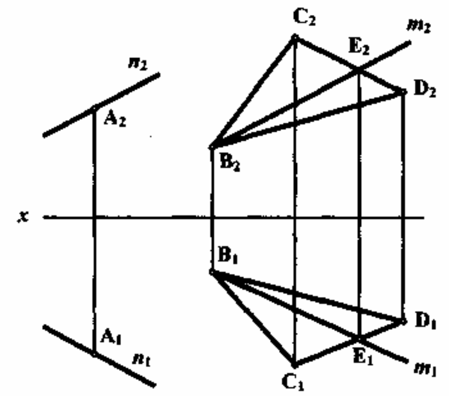


Рис. 7.5

Решение: в условии задачи задана фронтальная проекция m_2 прямой m. Поэтому необходимо вначале найти горизонтальную проекцию m_1 прямой m. Условия параллельности прямой и плоскости: прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-то прямой, расположенной в данной плоскости.

Используя это условие, строят проекции искомой прямой, проходящие через точку A; n_1 проводится параллельно m_1, n_2 — параллельно m_2.

8 ПРЯМАЯ ЛИНИЯ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНАЯ К ПЛОСКОСТИ

8.1 Основные положения

Обратимся к рисунку 8.1, на котором изображена плоскость Σ и перпендикулярная к ней прямая *n*.

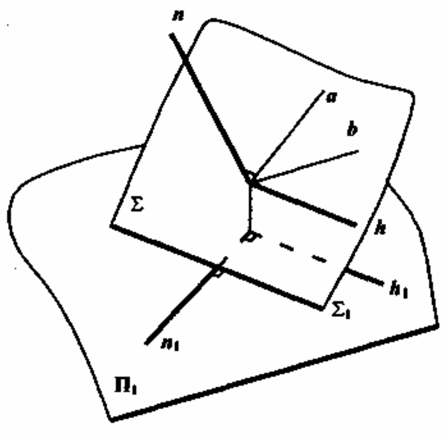


Рис. 8.1

Прямая и перпендикулярна к любой прямой плоскости Σ, т.е. $n \perp a, n \perp b, ..., n \perp h, n \perp f$. Каждый такой прямой угол проецируется на плоскость проекций в виде некоторого угла, но угол между прямой n и горизонталью плоскости *h* проецируется на горизонтальную плоскость проекций прямым углом, так как его сторона $h \| \Pi_1$.

Если $n \perp \Sigma$, то $n \perp h, n_1 \perp h_1$.

Угол между прямой *n* и фронталью f плоскости проецируется на фронтальную плоскость проекций прямым углом (его сторона $f \| \Pi_2$).

Если $n \perp \Sigma$, то $n \perp f, n_2 \perp f_2$.

Если прямая перпендикулярна к плоскости, то ее проекции перпендикулярны к одноименным проекциям линий уровня этой плоскости.

На рисунке 8.2 через точку N проведена прямая и, перпендикулярная к плоскости Σ. Для этого в плоскости Σ *(axb)* определены горизонталь h и фронталь f, и горизонтальная проекция перпендикуляра проведена перпендикулярно к горизонтальной проекции горизонтали, а фронтальная проекция — перпендикулярно к фронтальной проекции фронтали: $n_1 \perp h_1, n_2 \perp f_2$.

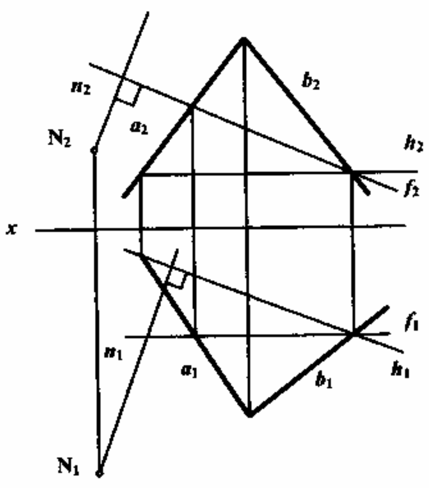


Рис. 8.2

В том случае, когда плоскость задана следами (рис. 8.3), проекции перпендикуляра располагаются перпендикулярно к одноименным следам плоскости: $n_1 \perp \Sigma_1, n_2 \perp \Sigma_2$.

Рисунок 8.2 позволяет утверждать, что изображенные на нем прямая и и плоскость S взаимно перпендикулярны. Действительно, из чертежа следует, что прямая n перпендикулярна к прямой h, так как угол между горизонтальными проекциями сторон угла прямой и одна сторона его (h) параллельна плоскости Π_1. Точно так же прямая и перпендикулярна к прямой f. Но если прямая линия перпендикулярна к двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

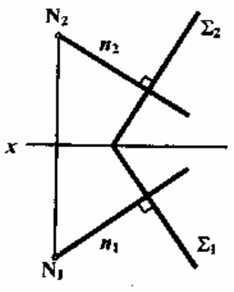


Рис. 8.3

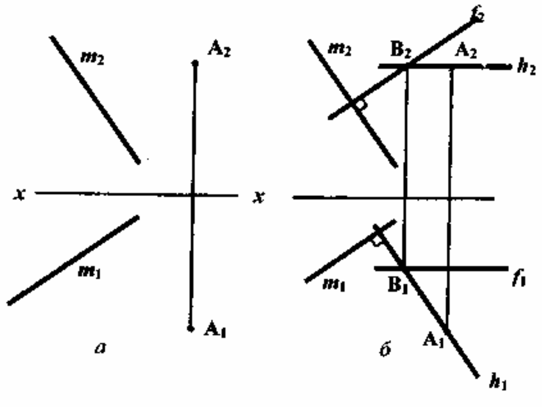


Рис. 8.4

Плоскость, перпендикулярную к данной прямой, определяют с помощью пересекающихся линий уровня. На рисунке 8.4 *(а* - условие, *б* - решение) через данную точку А проведена плоскость Σ, перпендикулярная к заданной прямой *n.* Горизонталь h плоскости проходит через точку А ($h \supset A, h_1 \perp n_1$). Фронталь этой плоскости может быть также проведена через точку А, но может пересекать горизонталь и в любой другой точке, поскольку все они находятся в искомой плоскости. На рисунке 8.4 фронталь f_2 проходит через точку В $(f \cap h = B, f_2 \perp n_2), \Sigma(h \cap f) \perp n$.

На рисунке 8.5 показана прямая, перпендикулярная к горизонтально проецирующей плоскости. Очевидно, эта линия является горизонталью.

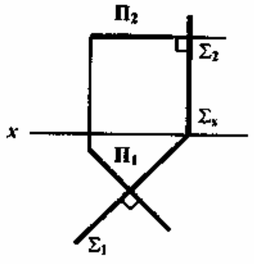


Рис. 8.5

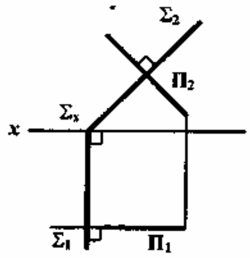


Рис. 8.6

На рисунке 8.6 изображена прямая, перпендикулярная к фронтально проецирующей плоскости. Она является фронталью.

На рисунке 8.7 изображена прямая *n* (MN), перпендикулярная к профильно проецирующей плоскости Σ. Заметим, что, проведя проекции $n_2 \perp f_2$ и $n_1 \perp h_1$ мы еще не определим величину искомого перпендикуляра.

Это не должно нас удивлять, так *как* $f \equiv h$, а перпендикулярность прямой и плоскости обеспечивается перпендикулярностью этой прямой к двум пересекающимся прямым плоскости. Для решения задачи нужно построить профильный след. Тогда $n_3 \perp \Sigma_3$.

Если требуется определить, перпендикулярна ли некоторая прямая *m к* заданной плоскости Σ, то через какую-нибудь точку М этой прямой следует провести перпендикуляр n к плоскости Σ (рис. 8.8).

При совпадении линии m и n прямая m перпендикулярна к плоскости Σ.

8.3 Примеры решения задач

8.3.1 **Задание:** опустить перпендикуляр из точки А на плоскость Σ $(a \cap b)$ и найти его основание точку В.

Решение: исходя из принципа перпендикулярности прямой и плоскости (прямая перпендикулярна к плоскости, если она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым этой плоскости), необходимо в плоскости провести две пересекающиеся прямые, а именно горизонталь h и фронталь f (рис. 8.9).

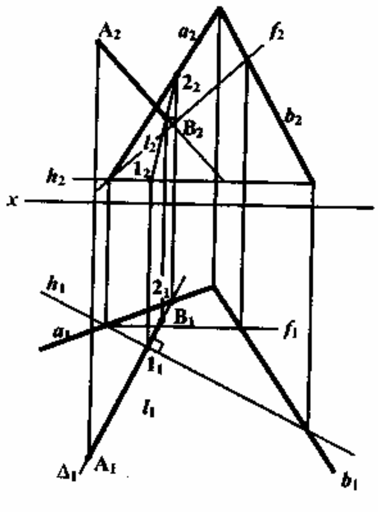


Рис. 8.9

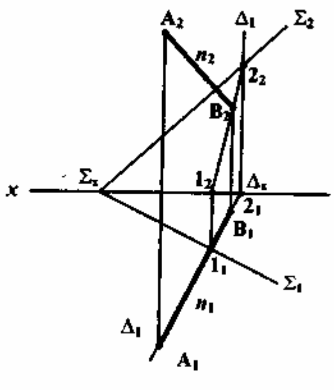


Рис. 8.10

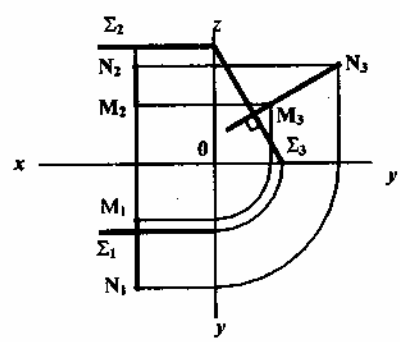


Рис. 8.7

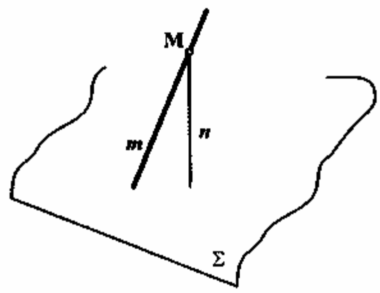


Рис. 8.8

Затем из точки A проводим нормаль n к плоскости Σ. На основании теоремы о проецировании прямого угла $n_1 \perp h_1$ и $n_2 \perp f_2$. Если плоскость задана следами, то $n_1 \perp \Sigma_1$ и $n_2 \perp \Sigma_2$ (рис. 8.10). Основание перпендикуляра определяется как точка пересечения его с плоскостью. Для этого нужно провести через нормаль проецирующую плоскость $\Delta(\Delta \perp \Pi_1)$, найти линию пересечения $l(l_1,l_2)$ плоскостей Σ и Δ и на пересечении этой линии и нормали отметить общую точку B для нормали и плоскости ($l \cap n_2 = B_2, B_1 \in n_2$).

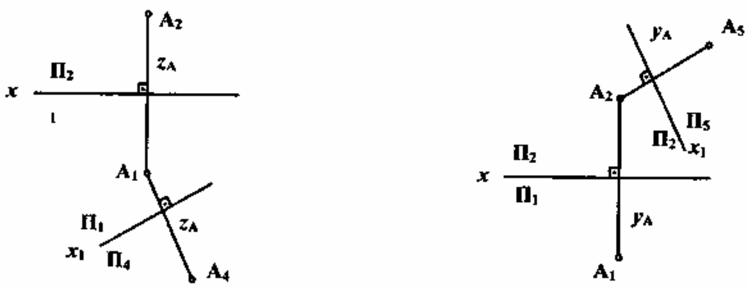
9 СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОЕКЦИЙ

9.1 Замена плоскостей проекций

Суть метода заключается в том, что одна из плоскостей проекций заменяется на новую плоскость проекций, при этом последнюю проводят перпендикулярно к незаменяемой плоскости. При такой замене величина координаты любой точки на вводимой плоскости будет такой же, как координаты той же точки на заменяемой плоскости.

Например, если заменить фронтальную плоскость проекций $\mathbf{\Pi_2}$ на новую плоскость $\mathbf{\Pi_4}$ (рис. 9.1, а), то последняя должна быть перпендикулярна к плоскости Π_1 а расстояние от проекции точки A_4 до оси x_1 будет равно расстоянию от проекции точки A_2 до оси x. Новая ось проекции x_1 проводится так, как этого требует решение задачи. В рассматриваемом случае она проведена произвольно.

При замене горизонтальной плоскости $\mathbf{H_1}$ на новую плоскость $\mathbf{\Pi_5}$ (рис. 9.1, б) сохраняется неизменная координата.);.



а *б*

Рис. 9.1

При решении конкретной задачи таких замен может быть выполнено последовательно несколько. Главные условия этих действий — сохранение ортогонального проецирования в новой системе проекций и величин соответствующих координат.

Пусть дана прямая общего положения AB (рис. 9.2). Необходимо преобразовать чертеж отрезка AB таким образом, чтобы прямая стала проецирующей, т.е спроецировалась на одну из плоскостей проекции в точку. Такое преобразование с заменой плоскостей выполняется в два этапа.

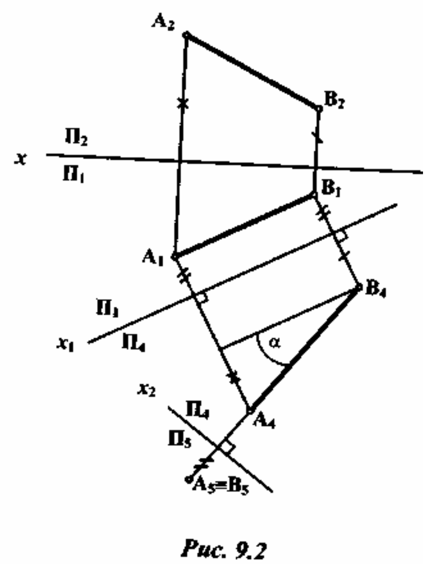


Рис. 9.2

На первом этапе новую плоскость, например $П_4$, вводят взамен фронтальной плоскости $\mathbf{П_2}$**,** параллельно прямой **AB.** Новую ось проекций x_1 проводят параллельно горизонтальной проекции прямой $\mathbf{A_1B_1}$**.** Далее проводят от горизонтальной проекции линии связи, перпендикулярные к новой оси проекций, и на них откладывают координаты г, т.е. расстояние от сторон оси проекций до фронтальных проекций точек. Новая проекция $\mathbf{A_4B_4}$ будет определять натуральную длину отрезка **AB.** Одновременно определяется угол наклона прямой к плоскости проекций, в рассматриваемом примере к горизонтальной плоскости $П_1$ – угол α . При замене горизонтальной плоскости проекции $\boldsymbol{П_1}$ на новую угол наклона прямой АВ к плоскости $П_2$ - β .

На втором этапе в системе плоскостей $\mathbf{П_1/П_4}$ плоскость проекций $\mathbf{П_1}$ заменяют на $\mathbf{П_5}$**.** При этом ось x_2 проводят перпендикулярно к проекции $\mathbf{A_4B_4}$**.** В новой системе плоскостей проекций $\mathbf{П_4/П_5}$ прямая заняла проецирующее положение, т.е. она стала перпендикулярна к плоскости $П_5$, и на нее прямая спроецировалась в точку, а концы отрезка **AB** совпали на проекции $\mathbf{A_5 \equiv B_5}$**.**

Метод применяется для определения расстояния между параллельными и скрещивающимися прямыми, величины двугранного угла, натуральной величины плоской фигуры и различных ее параметров.

В том случае, если прямые являются прямыми уровня, т.е. параллельны одной из плоскостей проекций, первый этап решения опускается и преобразование начинается со второго этапа.

9.2 Вращение вокруг проецирующей оси

Этот метод заключается в том, что любая точка вращается вокруг какой-либо оси, перпендикулярной к одной из плоскостей проекции. При этом точка в пространстве движется по траектории окружности, которая лежит в плоскости, перпендикулярной к оси вращения. Система плоскостей проекций остается неизменной.

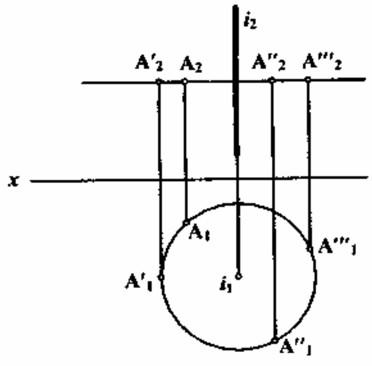


Рис. 9.3

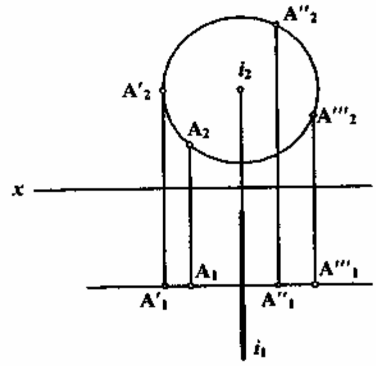


Рис. 9.4

Например, при вращении точки А вокруг оси i (рис. 9.3), перпендикулярной к $П_2$, она движется по траектории, которая проецируется на плоскость $П_1$ в виде окружности (точки A_1 A_1', A_1, A_1''' и т.д.), а на плоскость $П_2$ - в виде следа горизонтальной плоскости уровня. Все фронтальные проекции точки А (A_2, A_2', A_2'' и т.д.) находятся на фронтальном следе горизонтальной плоскости. Точка i_1 представляет собой горизонтальную проекцию оси i, а прямая i_2 — ее фронтальную проекцию.

Если вращать точку А вокруг оси i, перпендикулярной к фронтальной плоскости проекций $П_2$ (рис. 9.4), то фронтальные проекции A_2, A_2', A_2'' и т.д. точки А будут лежать на окружности, плоскость которой перпендикулярна к оси i и горизонтальной плоскости проекции. При этом горизонтальные проекции A_2 A_2', A_2'' и т.д. точки А будут расположены на горизонтальном следе этой плоскости.

9.3 Метод плоскопараллельного перемещения

Применение метода вращения вокруг проецирующей оси при преобразовании нередко приводит к наложению на исходную новых проекций. При этом чтение чертежа представляет определенные сложности. Избавиться от указанного недостатка позволяет метод плоскопараллельного перемещения проекций фигуры.

Суть метода заключается в том, что все точки фигуры перемещаются в пространстве параллельно некоторой плоскости (например, параллельно какой-либо плоскости проекций). Это означает, что каждая точка фигуры перемещается в соответствующей плоскости уровня.

Например, прямая общего положения АВ, заданная своими проекциями **A_1 B_1 и A_2B_2** (рис. 9.5), перемещается таким образом, чтобы горизонтальная проекция $A_1^1 B_1^1$ стала параллельной оси *x*.

При этом точки A_2 и B_2 фронтальной проекции прямой АВ перемещаются в горизонтальных плоскостях уровня Σ и Ω (на фронтальной проекции Σ_2 и Ω_2 параллельны оси *x)* и займут новое положение $A_2^{\ 1}$ и $B_2^{\ 1}$. При перемещении длина горизонтальной проекции A_1B_1 отрезка АВ остается постоянной, а величина фронтальной проекции A_2 B_2 будет натуральной величиной отрезка, при этом угол а - угол наклона прямой АВ к горизонтальной плоскости проекции $П_1$.

При перемещении прямой АВ во фронтальной плоскости уровня Δ можно достичь положения прямой, перпендикулярной к плоскости $П_1$.

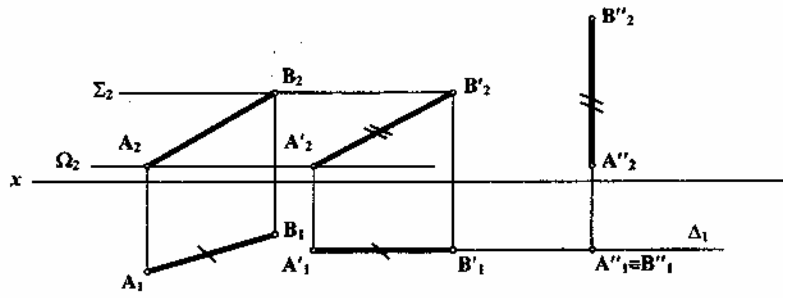


Рис. 9.5

Этот метод применяется для определения натуральной величины отрезка, его угла наклона к плоскостям проекций, расстояния между параллельными прямыми и натуральной величины плоской фигуры.

9.4 Метод вращения вокруг линии уровня

Суть метода заключается в том, что осью вращения выбирается одна из линий уровня - горизонталь или фронталь плоскости или плоской фигуры. Таким образом, плоскость как бы поворачивается вокруг некоторой оси, принадлежащей этой плоскости, до положения, при которой эта плоскость становится параллельной одной из плоскостей проекций.

Например, повернем плоский угол, образованный пересекающимися прямыми a и b (рис. 9.6).

Для решения поставленной задачи проводят в плоскости угла горизонталь h и используют ее как ось вращения, вокруг которой будут вращаться прямые *a* и b и вершина К. Все точки вращаются в плоскостях, перпендикулярных к горизонтали, при этом точки 1 и 2 остаются неподвижными, а точка К вращается вокруг горизонтали. Из горизонтальной проекции $\mathbf{K_1}$ точки К проводят линию, перпендикулярную к оси вращения h_1. Отрезок K_1O_1- горизонтальная проекция радиуса вращения точки К. Натуральную величину этого радиуса находят методом построения прямоугольного треугольника.

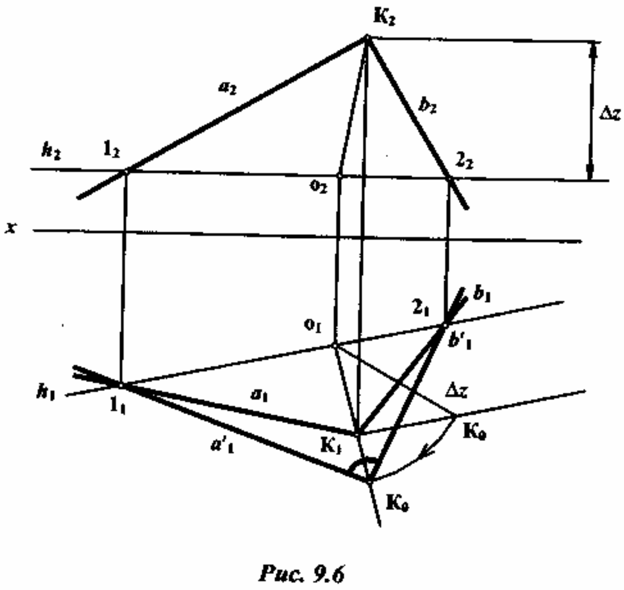


Рис. 9.6

На продолжении прямой $\mathbf{O_1K_1}$ откладывают гипотенузу $\mathbf{O_1K_0}$ и получают совмещенное положение K_0 Соединив точки 1_1 и 2_1 с точкой K_0, получают натуральную величину угла при вершине К.

Этим способом находится натуральная величина любой плоской фигуры, плоского угла.

9.5 Метод совмещения плоскостей

Этот метод является частным случаем метода вращения вокруг линии уровня. В качестве оси вращения выбирается линия пересечения плоскости, в которой лежит та или иная фигура, с одной из плоскостей проекций. Иначе говоря, осью вращения служит горизонтальный или фронтальный след плоскости. При этом каждая точка, принадлежащая рассматриваемой фигуре, при вращении перемещается в плоскости, перпендикулярной к следу той плоскости, в которой она лежит. Например, плоскость θ, заданную своими следами θ_1 и θ_2, необходимо совместить с горизонтальной плоскостью проекций **П₁** (рис. 9.7).

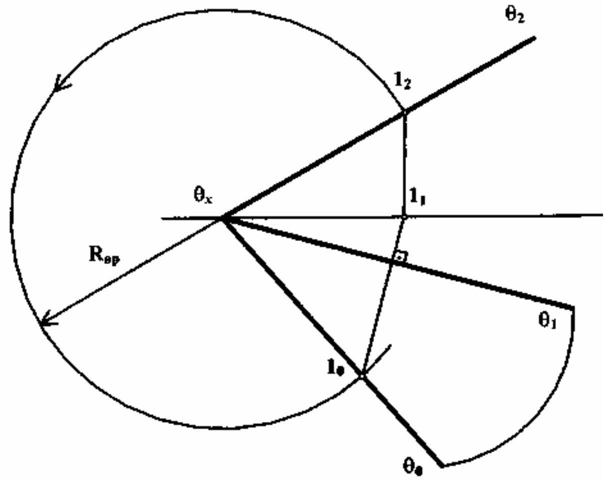


Рис. 9.7

Для решения поставленной задачи берут на фронтальном следе θ_2 плоскости θ произвольную точку 1_2 и находят ее горизонтальную проекцию 1, которая лежит на оси *x*. Далее из точки 1_1 проводят луч, перпендикулярный к горизонтальному следу плоскости θ_1 (любая точка при вращении должна перемещаться в плоскости, перпендикулярной к оси поворота). На нем находят совмещенное положение точки 1 — точку 1_0, как точку пересечения луча с дугой окружности радиусом $\theta_x 1_2 = R_{вп}$. Точка 1_0 принадлежит одновременно и плоскости $П_1$ и новому (совмещенному) положению плоскости θ. Через точку 1_0 проводят новый фронтальный след θ_0 плоскости θ. Следы θ_1 и θ_0 характеризуют новое (совмещенное) положение плоскости θ.

9.6 Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит сущность преобразования ортогональных проекций способом замены плоскостей проекций?
2. Сколько замен плоскостей проекций и в какой последовательности необходимо выполнить, чтобы перевести отрезок прямой общего положения в отрезок прямой частного положения?
3. Сколько замен плоскостей проекций и в какой последовательности необходимо выполнить, чтобы определить натуральную величину плоской фигуры?
4. В чем заключается способ вращения вокруг проецирующейоси?
5. В каких плоскостях перемещается точка, вращаемая вокруг оси, перпендикулярной к плоскостям $П_1$ и $П_2$?
6. Сущность способа плоскопараллельного перемещения.
7. Что представляет собой преобразование чертежа способом вращения вокруг линии уровня?
8. В чем заключается преобразование чертежа способом совмещения?

9.7 Примеры решения задач

Ниже приведены решения одной и той же задачи вышеописанными методами.

9.7.1 Задание: определить натуральную величину треугольника общего положения **АВС,**

заданного проекциями вершин $\mathbf{A_1}$ $\mathbf{B_1}$ $\mathbf{C_1}$ **и** $\mathbf{A_2B_2C_2}$ (рис. 9.8), а также угол наклона плоскости треугольника к $П_1$.

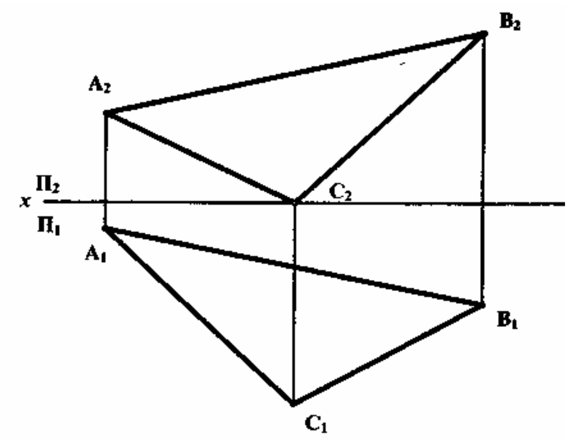


Рис. 9.8

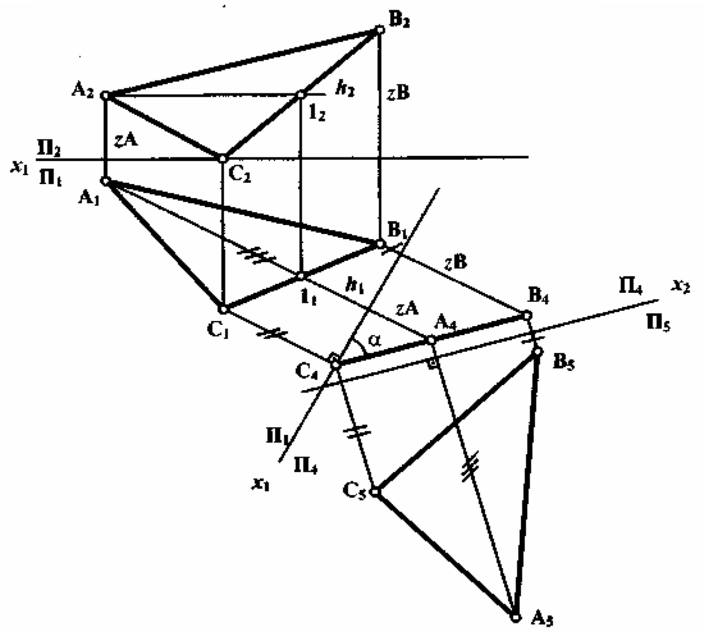


Рис. 9.9

1) Решение методом замены плоскостей проекций (рис. 9.9).

Плоскость треугольника спроецируется в натуральную величину в том случае, если она будет в пространстве параллельна одной из плоскостей проекций. Одним преобразованием задачу решить невозможно. Она решается в два этапа: при первой замене плоскостей проекций получают плоскость треугольника **АВС,** перпендикулярную к новой плоскости проекций, при второй замене - получают плоскость треугольника, параллельную новой плоскости проекций.

Первый этап. Одним из условий перпендикулярности двух плоскостей является наличие прямой, принадлежащей одной из плоскостей, перпендикулярной к другой плоскости. Используя этот признак, проводят через точку А в плоскости треугольника горизонталь (h). Затем на произвольном расстоянии от горизонтальной проекции треугольника $A_1B_1C_1$ проводят ось x_1 новой системы плоскостей проекций $П_1/\mathbf{П_4}$ перпендикулярно к горизонтальной проекции горизонтали h_1. В новой системе треугольник АВС стал перпендикулярен к новой плоскости проекций $\mathbf{П_4}$**.**

На линиях проекционной связи в новой системе откладывают координаты z точек А, В, С с фронтальной проекции исходной системы плоскостей $\mathbf{П_1/П_2}$**.** При соединении новых проекций A_4, B_4**,** $\mathbf{C_4}$ получают прямую линию, в которую спроецировалась плоскость треугольника АВС. На этом этапе определяется угол наклона плоскости треугольника к горизонтальной плоскости проекции $П_1$ - угол α . На чертеже это угол между осью x_1 и проекцией $\mathbf{C_4A_4B_4}$**.**

Второй этап. Выбираем новую плоскость проекции $\mathbf{П_5}$**,** параллельную плоскости треугольника, т.е. новую ось $\mathbf{x_2}$ проводят параллельно $\mathbf{C_4A_4B_4}$ на произвольном расстоянии. Получают новую систему $\mathbf{П_4/П_5}$. Полученный треугольник $\mathbf{A_5B_5C_5}$ и есть искомая натуральная величина треугольника ABC.

2) Решение методом вращения вокруг проецирующей оси
(рис. 9.10).

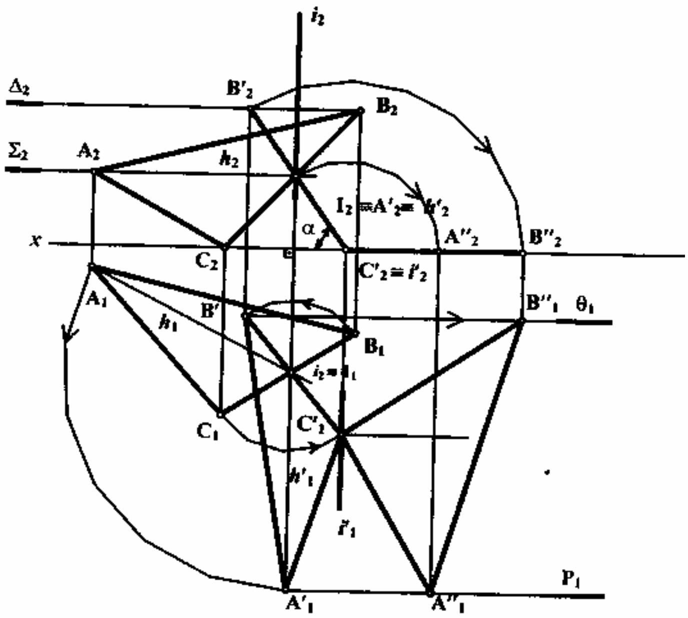


Рис. 9.10

Задача решается в два этапа. На *первом этапе* выполняют вращение так, чтобы плоскость треугольника ABC преобразовалась в проецирующую плоскость, т.е. стала перпендикулярна к одной из плоскостей проекций. Для этого на фронтальной проекции чертежа проводят горизонталь h_2 через точку A_2. Затем строят горизонтальную проекцию h_1 горизонтали h через точки A_1 и 1_1 Через точку 1 проводят ось i - ось вращения треугольника так, чтобы она была перпендикулярна к $П_1$. На фронтальной проекции через вершины A_2 и B_2 проводят горизонтальные плоскости уровня Δ_2 и Σ_2. Вершина С принадлежит плоскости $\mathbf{П_1}$ поэтому ее плоскостью вращения будет плоскость проекций $\mathbf{П_1}$. На горизонтальной проекции, взяв за центр вращения проекцию i_1 поворачивают горизонталь A так, чтобы на плоскость $П_2$ она спроецировалась в точку. На чертеже это выразится тем, что h'_1 займет новое положение - перпендикулярно к оси *x.* При этом на фронтальной проекции точка A_2 перемещается по следу плоскости Σ_2 до пересечения с линией связи, проведенной через точку A'_1. На горизонтальной проекции поворачиваем оставшиеся вершины B и C вокруг оси так, чтобы $|\Delta A_1B_1C_1| = |A`_1B`_1C`_1|$. На фронтальной проекции вершина B перемещается по следу плоскости Δ_2, а вершина C - по оси *x.* Соединив новое положение всех вершин треугольника ABC, получают проекцию $\mathbf{A'_2B'_2C'_2}$, сливающуюся в линию. Этим достигают проецирующего положения треугольника ABC. На данном этапе, при необходимости, находят угол наклона плоскости треугольника ABC к $П_1$ - α .

На *втором этапе* проводят ось i` через вершину C так, чтобы ось была фронтально проецирующая. При этом $C'_2 = /'_2$, а горизонтальная проекция i'_1 пройдет через проекцию C'_1. Вокруг оси поворачивают треугольник так, чтобы он стал параллелен горизонтальной плоскости проекций. В данной задаче вращают точки A'_2 и B'_1, вокруг $i`_2 = C'_2$ до совмещения с осью *x,* при этом горизонтальные проекции B'_1 и A'_1 будут перемещаться в горизонтально проецирующихся плоскостях уровня θ_1 и P_1 и займут новое положение B''_1, и A''_1 вершина C останется на месте. Соединив новые точки между собой, получают треугольник ABC в натуральную величину.

3) Решение методом плоскопараллельного перемещения
(рис. 9.11).

Задача решается в два этапа. На *первом этапе* преобразовывают чертеж так, чтобы плоскость треугольника ABC стала перпендикулярна к одной из плоскостей проекций, т.е. должна в себе содержать прямую, перпендикулярную к этой плоскости. Для этого проводят в плоскости треугольника горизонталь h (фронтальная проекция $\mathbf{A_21_2}$ // ***x,*** а горизонтальная —

$A_1 1_1$). Каждую вершину треугольника заключают в свою плоскость уровня, параллельную плоскости *$П_1$*. В рассматриваемом примере вершина С принадлежит плоскости проекций $П_1$, А принадлежит плоскости Σ, а В — плоскости А.

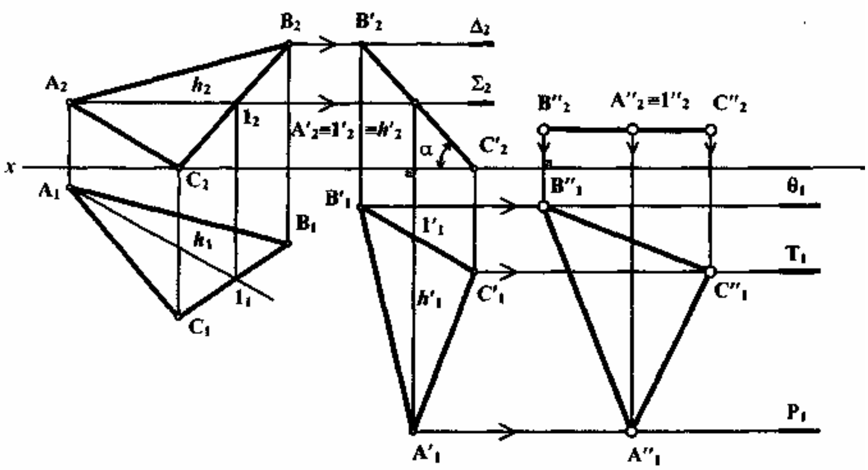


Рис. 9.11

Плоскость треугольника перемещается в пространстве до тех пор, пока горизонталь h_1 треугольника не станет перпендикулярна к фронтальной плоскости проекций $П_2$. Для этого на произвольном расстоянии от оси *x* вычерчивают горизонтальную проекцию треугольника $\mathbf{A_1B_1C_1}$ с условием, что $A_1 1_1 \perp П_2$, а значит $A`_1 1`_1 \perp$ *x*. При этом вершины треугольника, перемещаясь каждая в своей плоскости, займут новое положение - $\mathbf{A'_2B'_2C'_2}$. Соединив эти точки, получают новое положение треугольника ABC, спроецированного в линию, т.е. перпендикулярного к плоскости $П_2$.

На *втором этапе,* чтобы получить натуральную величину треугольника ABC, его плоскость поворачивают до тех пор, пока она не будет параллельна одной из плоскостей проекций. В рассматриваемом решении фронтальную проекцию треугольника $\mathbf{A'_2B'_2C'_2}$ располагают на произвольном расстоянии от оси *x* параллельно плоскости $П_1$. При этом вершины А, В и С треугольника заключают в горизонтально проецирующие плоскости θ, Т, Р. По следам этих плоскостей будут перемещаться горизонтальные проекции вершин A'_1 B'_1 C'_1. От нового положения фронтальной проекции $A''_2B''_2C''2$ проводят линии проекционной связи до пресечения с соответствующими следами плоскостей, в которых они перемещаются (θ_1,T_1,P_1), и получают точки A''_1 B''_1 C''_1. Соединив эти точки между собой, получают треугольник ABC в натуральную величину.

4) Решение методом вращения вокруг линии уровня (рис. 9.12).

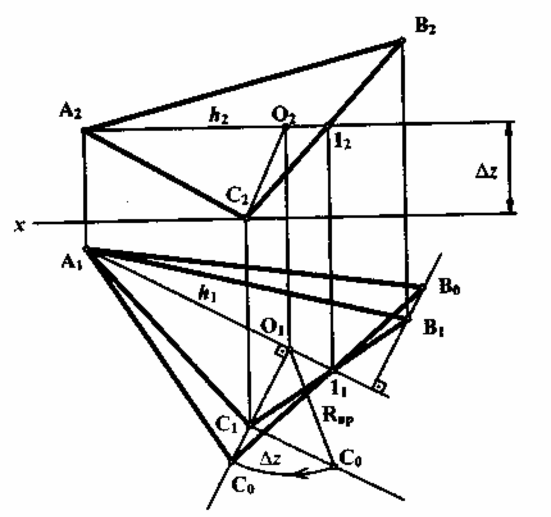


Рис. 9.12

Для решения задачи этим способом необходимо повернуть плоскость треугольника вокруг линии уровня, в данном случае вокруг горизонтали, в положение, параллельное горизонтальной плоскости проекции. Через точку А в плоскости треугольника АВС проводят горизонталь *h,* фронтальная проекция которой будет параллельна оси *x.* Отмечают точку 1_2 и находят ее горизонтальную проекцию 1_1. Прямая $A_1 1_1$ является горизонтальной проекцией h_1 горизонтали h. Вокруг горизонтали будут вращаться точки В и С. Для определения радиуса вращения точки С на горизонтальной проекции проводят перпендикуляр $C_1O_1 \perp A_1 1_1$ точка O_1, является центром вращения точки С.

Для определения натуральной величины радиуса вращения строят прямоугольный треугольник, в котором O_1C_1 - один из катетов. Второй катет - разность координат Δz отрезка O_2C_2, взятого с фронтальной проекции. В построенном треугольнике гипотенуза O_1C_0 - натуральная величина радиуса вращения.

На продолжении перпендикуляра O_1C_1 откладывают $|R_{Bp.}|$ и получают новое положение вершины С после вращения — C_0. Вторая вершина B_0 получается пересечением луча $C_0 1_1$ и перпендикуляра к горизонтальной проекции h_1 проведенного через точку B_1.

Треугольник $A_1B_0C_0$ есть искомая натуральная величина треугольника АВС.

5) Решение методом совмещения (рис. 9.13).

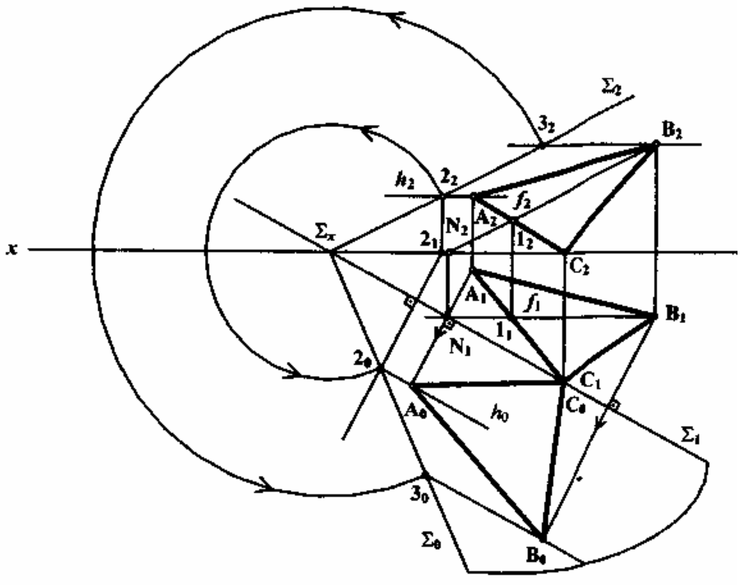


Рис. 9.13

Для решения задачи методом совмещения необходимо построить следы плоскости Σ, которой принадлежит треугольник ABC. Для этого проводят в плоскости треугольника ABC фронталь f и находят горизонтальный след этой фронтали – N_1. По условию задачи вершина С треугольника принадлежит горизонтальной плоскости проекций Π_1. Тогда горизонтальный след Σ_1 плоскости Σ проводят через точки N_1 и C_1. Соединив эти две точки и продлив отрезок до пересечения с осью *x,* находят точку схода следов Σ_x. Учитывая свойство, что все фронтали плоскости параллельны ее фронтальному следу, фронтальный след Σ_2 плоскости Σ проводят через точку Σ_x параллельно фронтали f_2.

Для нахождения натуральной величины треугольника ABC необходимо построить совмещенное положение плоскости Σ с горизонтальной плоскостью проекций Π_1. Для этого через вершину А проводят горизонталь h_1. На фронтальном следе Σ_2 фиксируют точку 2_2. Ее горизонтальная проекция - точка 2_1. Точка 2 вращается в плоскости, перпендикулярной к горизонтальному следу плоскости Σ. Поэтому, чтобы построить точку 2 в совмещенном положении 2_0, проводят из 2_1 перпендикуляр к горизонтальному следу Σ, а из центра Σ_x дугу окружности радиусом $\Sigma_x 2_2$ до пересечения с направлением перпендикуляра. Соединив Σ_x с 2_0, получают совмещенное положение фронтального следа Σ_0- Далее через точку $2_о$ проводят горизонталь h_a *в* совмещенном положении. На этой горизонтали находят точку A_0, проведя перпендикуляр из точки A_1 к горизонтальному следу Σ_1.

По такой же схеме строят совмещенное положение точки B_0. Совмещенное положение точки С совпадает с ее горизонтальной проекцией C_1 т.е. $C_1 \equiv C_0$. Соединив построенные точки, получают треугольник $A_0B_0C_0$ - это и есть натуральная величина треугольника ABC.

10 МНОГОГРАННИКИ. СЕЧЕНИЕ МНОГОГРАННИКОВ ПЛОСКОСТЬЮ. РАЗВЕРТКИ МНОГОГРАННИКОВ

10.1 Сечение многогранников плоскостью

Многогранник есть геометрическое тело, ограниченное плоскими многоугольниками (гранями), пересекающимися по прямым линиям (рёбрам). Фигура сечения многогранника есть плоский многоугольник, сторонами которого являются прямые пересечения заданной плоскости с плоскостями граней, а вершинами -— точки пересечения рёбер многогранника с заданной плоскостью.

Построение фигуры сечения многогранника плоскостью может выполняться двумя способами:

- путем определения линии пересечения заданной плоскости с каждой из плоскостей (граней), ограничивающих геометрическое тело многогранника (эти линии — стороны фигуры сечения);
- путем нахождения точек пересечения всех ребер с заданной плоскостью (эти точки — вершины фигуры сечения).

Первый способ называется способом граней, второй — способом ребер. Выбор способа построения фигуры сечения зависит от положения секущей плоскости, рёбер и граней многогранника относительно плоскостей проекций.

10.1.1 Способ граней

Суть способа сводится к последовательному определению линий пересечения двух плоскостей, одна из которых является заданной, а другая - какой-либо гранью многогранника (см. разд. 6). Для построения же самой фигуры сечения определяют точки пресечения найденных прямых, которые являются вершинами многоугольника сечения.

10.1.2 Способ ребер

Этот способ заключается в определении точек встречи прямых (ребер) с заданной плоскостью (см. разд. 7). Установив последовательно для всех ребер точки встречи их с секущей плоскостью, соединяют эти точки отрезками прямых и получают многоугольник сечения.

10.2 Развертки многогранников

В инженерном деле многогранники чаще всего реализуются как оболочка заданных форм и размеров. Для их изготовления необходимо уметь выполнить развертку (выкройку) такой оболочки.

Развёртка многогранника представляет собой плоскую фигуру, полученную последовательным совмещением всех граней многогранника с плоскостью чертежа таким образом, чтобы грани примыкали друг к другу по линиям сгиба (рёбрам).

Для построения развёртки многогранника необходимо иметь натуральные величины всех его граней, поэтому задача построения развертки многогранника решается в два этапа:

1) определяют натуральную величину каждой грани (см. разд. 9);
2) потом путем вращения вокруг соответствующей линии (ребра) (см. разд. 9) совмещают грани с плоскостью чертежа.

10.3 Вопросы для самопроверки

1. Чем задаётся призматическая поверхность?
2. Какие признаки позволяют установить, что на данном чертеже изображена призма?
3. Чем задаётся поверхность пирамиды?
4. Какая фигура образуется в результате сечения призмы плоскостью, параллельной её боковым рёбрам?
5. Какая фигура образуется в результате сечения пирамиды плоскостью, проходящей через её вершину?
6. В чём заключается решение задач по определению сечения поверхности плоскостью с помощью способа граней и способа рёбер?
7. Что называется развёрткой поверхности?
8. Способы построения развёрток многогранников, содержание каждого из них.
9. В каких случаях для построения развёртки используются способы: нормального сечения, раскатки, треугольников?

10.4 Примеры решения задач

10.4.1 **Задание:** определить сечение трёхгранной призмы (рис. 10.1) плоскостью **$P(P_1P_2)$.** Построить полную развёртку поверхности призмы и нанести на ней линию сечения.

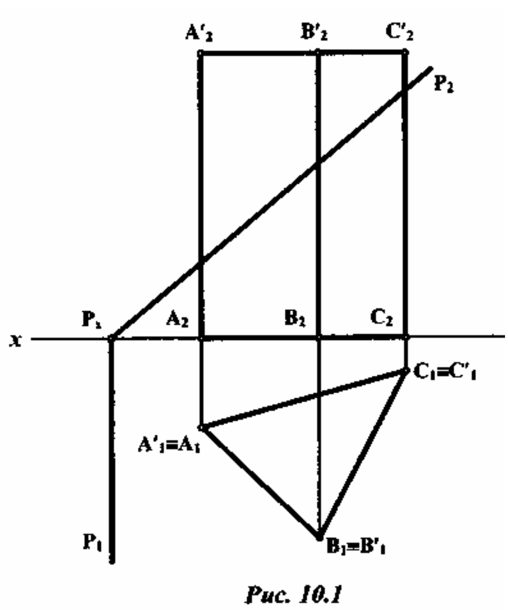


Рис. 10.1

Решение: секущая плоскость Р является фронтально проецирующей и пересекает все рёбра прямой призмы АА', **ВВ', СС'.** Для решения задачи используют свойство проецирующей плоскости, следуя которому фронтальная проекция $1_2 2_2 3_2$ фигуры сечения 1, 2, 3 совпадает с фронтальным следом $\mathbf{P_2}$ плоскости Р (рис. 10.2).

Рёбра призмы АА', **ВВ', СС'** являются горизонтально проецирующими прямыми и на плоскость $\mathbf{П_1}$ проецируются в точки $А_1$ $В_1$ $С_1$ поэтому горизонтальная проекция Ii2i3i фигуры сечения 123 совпадает с горизонтальной проекцией призмы, т.е. $1_1 \in A_1A`_1, 2_1 \in B_1B`_1, 3_1 \in C_1C`_1$.

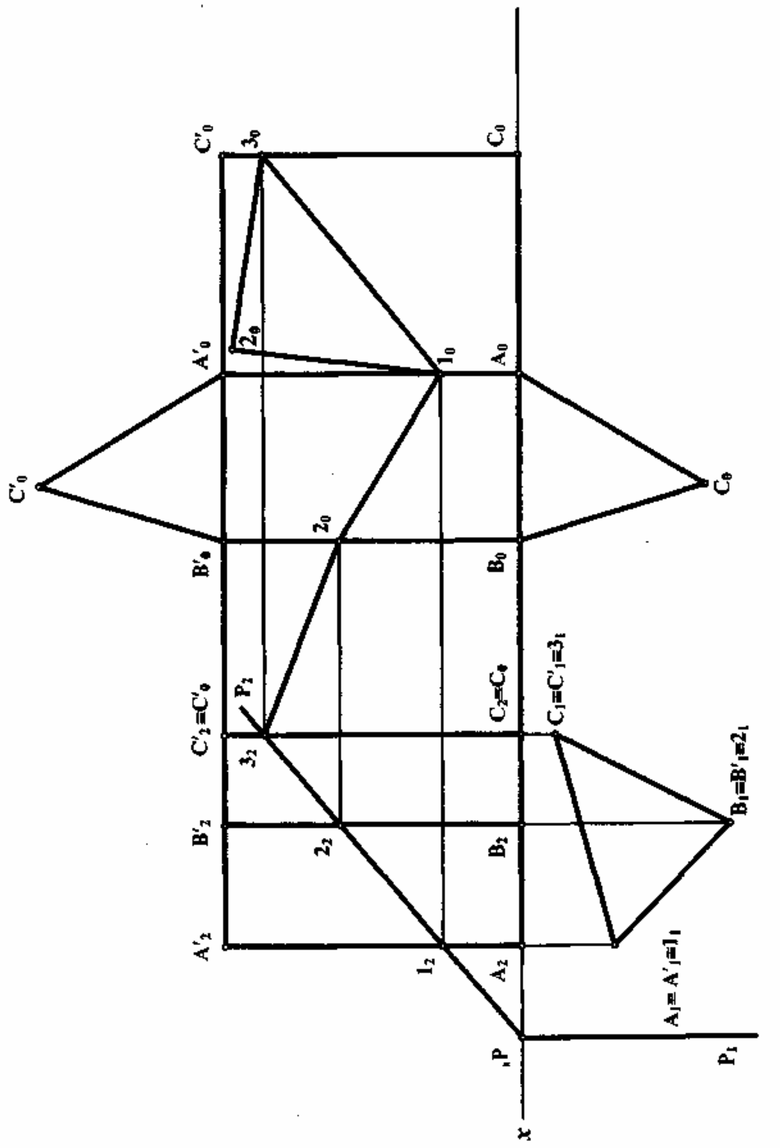


Рис. 10.2

В рассматриваемом примере основание призмы проецируется на горизонтальную плоскость проекций $П_1$ в натуральную величину, рёбра призмы параллельны фронтальной плоскости проекций $П_2$. Из этого следует, что фронтальные проекции рёбер $A_2A'_2$, $B_2B'_2$, $C_2C'_2$ являются натуральными величинами.

Для построения развёртки призмы совмещают ее боковые грани с фронтальной плоскостью проекций $П_2$. На совмещенных положениях граней $A_0A'_0$, $B_2B'_2$, $C_2C'_2$ развертки призмы отмечают точки 1_0, 2_0, 3_0 и последовательно соединяют их отрезками прямых линий. Верхнее A'B'C' и нижнее ABC основания и натуральную величину фигуры сечения $1_0 2_0 3_0$ пристраивают к развёртке, как треугольники по трём известным сторонам.

11 ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ ПЛОСКОСТЬЮ. РАЗВЕРТКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

Поверхность вращения общего вида образуется вращательным перемещением образующей линии вокруг неподвижной оси.

Каждая точка образующей линии при вращении вокруг неподвижной оси описывает окружность с центром на оси вращения. Эти окружности называются параллелями.

Наибольшую из параллелей (окружностей) поверхности вращения называют экватором поверхности, а наименьшую - горлом (шейкой) поверхности.

Плоскости, проходящие через ось поверхности вращения, называют меридиональными, а линии, по которым они пересекают поверхность, - меридианами. Меридиональная плоскость, параллельная плоскости проекции, называется плоскостью главного меридиана.

Линия пересечения плоскости главного меридиана с поверхностью вращения называется главным меридианом.

11.1 Пересечение поверхностей вращения плоскостью

При пересечении поверхности вращения плоскостью получается плоская фигура сечения. Построение проекций линии сечения необходимо начинать с определения опорных точек. К ним относятся точки, расположенные на очерковых образующих поверхности (точки, определяющие границы видимости проекций кривой), и точки, удаленные на экстремальные (максимальное и минимальное) расстояния от плоскостей проекций. После этого определяют произвольные (промежуточные) точки линии сечения.

Для определения точек, принадлежащих фигуре сечения, можно использовать различные методы. Один из них - метод вспомогательных секущих плоскостей. Суть его заключается в том, что заданные плоскость и поверхность вращения пересекают вспомогательной плоскостью. Находят линии пересечения этой плоскости с заданными плоскостью и поверхностью вращения. Затем отмечают точки, в которых пересекаются полученные линии пересечения. Построенные точки фигуры сечения соединяют плавной линией.

11.2 Развертки поверхностей вращения

Построение разверток поверхностей вращения имеет большое значение, особенно при конструировании из листового материала моделей различных сооружений, форм для металлических отливок, сосудов, трубопроводов, резервуаров и т.п.

11.2.1 Приближенные развертки

Поверхности, которые можно совместить с плоскостью без разрывов и складок, называют развертывающимися поверхностями. Фигуру, полученную при совмещении развертывающейся поверхности с плоскостью, называют разверткой.

Для развертывающихся поверхностей можно построить приближенную развертку.

При построении приближенной развертки поверхность аппроксимируют поверхностями вписанных или описанных многогранников, имеющих грани в форме прямоугольников или треугольников. Поэтому при графическом выполнении разверток поверхности всегда приходится производить разгибание или спрямление кривых линий, принадлежащих поверхности, что неизбежно приводит к потере точности.

11.2.2 Условные развертки

Неразвертывающиеся поверхности не могут быть совмещены с плоскостью без разрывов и складок, т.е. теоретически они не имеют своей развертки. Поэтому говорят лишь об условном решении задачи по построению разверток неразвертывающихся поверхностей.

На практике для получения развертки неразвертываемой поверхности, выполненной из листового материала, приходится кроме изгибания производить растяжение и сжатие определенных участков листа.

Построение условной развертки неразвертывающейся поверхности состоит в том, что отсеки заданной поверхности аппроксимируются отсеками развертывающихся поверхностей — гранными, цилиндрическими или коническими.

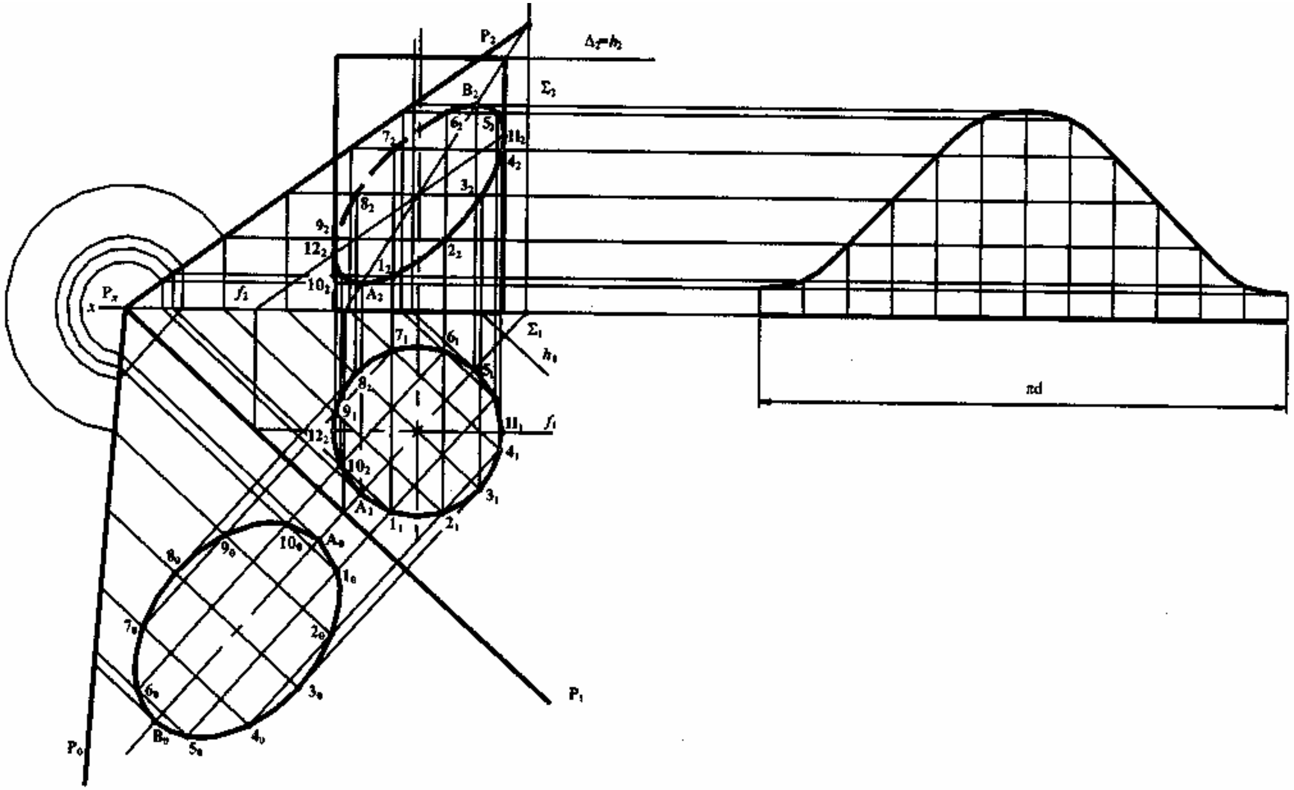


Рис. 11.3

11.4.3 **Задание:** построить проекции и натуральный вид фигуры сечения поверхности цилиндра плоскостью Р (рис. 11.3). Построить развёртку боковой поверхности усечённой части цилиндра.

Решение: на рисунке 11.3 изображены прямой круговой цилиндр, основание которого принадлежит горизонтальной плоскости проекций Π_1 и секущая плоскость Р общего положения.

Поскольку секущая плоскость наклонена к оси цилиндра, то боковая поверхность цилиндра пересекается по эллипсу. Фигура сечения в этом случае зависит от того, пересекает ли плоскость Р основания цилиндра.

В рассматриваемом случае секущая плоскость Р не пересекает оснований цилиндра. Это видно из того, что горизонтальная проекция нижнего основания не пересекается с горизонтальным следом плоскости Р, а горизонтальная проекция горизонтали h_1, по которой плоскость Р пересекается с плоскостью верхнего основания, не пересекает его горизонтальную проекцию.

Для нахождения эллипса сечения плоскости Р с боковой поверхностью цилиндра находят сначала его низшую А (A_1 A_2) и высшую В (B_1 B_2) точки. Эти точки являются концами большой оси эллипса сечения и лежат на линии наибольшего наклона плоскости Р к горизонтальной плоскости проекций. Следовательно, прямая **АВ** перпендикулярна к горизонтальному следу плоскости Р и пересекает ось цилиндра.

Для нахождения точек А и В проводят плоскость Σ, перпендикулярную к горизонтальному следу P_1 и проходящую через ось цилиндра. Эта плоскость перпендикулярна к плоскости Π_1. Затем находят прямую пересечения плоскостей Р и Σ.

Боковая поверхность цилиндра является горизонтально проецирующей и поэтому проецируется на горизонтальную плоскость проекций в окружность.

Так как отрезок АВ является частью линии пересечения плоскостей Р и Σ, а точки А и В лежат на боковой поверхности цилиндра, то горизонтальные проекции точек А и В должны лежать на одной окружности и на горизонтальной проекции прямой пересечения плоскостей Р и Σ. По горизонтальным проекциям точек А и В находят их фронтальные проекции, исходя из условия, что точки А и В лежат на найденной прямой пересечения плоскостей Р и Σ.

Для определения остальных точек эллипса сечения на цилиндрической поверхности выбирают ряд образующих. За первую образующую выбирают ту, на которой лежит точка А. Остальные образующие получают делением окружности (горизонтальной плоскости цилиндрической поверхности) на 12 равных частей (можно делить на другое количество частей).

Затем находят точки пересечения образующих с плоскостью Р. В рассматриваемом примере все образующие перпендикулярны к горизонтальной плоскости проекций. Следовательно, горизонтальные проекции точек пересечения образующих с плоскостью Р совпадают с горизонтальными проекциями самих образующих. Далее наносят горизонтальные проекции точек пересечения образующих с плоскостью Р (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) и находят фронтальные проекции этих точек, проводя через них горизонтали в плоскости.

Кривая линия, ограничивающая фронтальную проекцию фигуры сечения, включает видимые и невидимые участки. Точки, являющиеся границей видимости кривой, лежат на очерковых образующих. Отмечают горизонтальные проекции этих точек (**11_2** и 12_2*)* и находят фронтальные проекции (**11_2** и 12_2), проводя через эти точки в плоскости Р горизонтали.

Полученные точки соединяют плавной кривой линией. Кривая от точки 12 через точки 10, А, 1, 2, 3, 4 до точки 11 на фронтальной
плоскости проекций является видимой, а остальная часть - невидимой.

Видимую часть кривой обводят сплошной линией, а невидимую -штриховой. Малой осью эллипса сечения является отрезок [38], проецирующийся в натуральную величину на горизонтальную плоскость проекций. Натуральная величина малой оси эллипса в рассматриваемом примере равна диаметру цилиндра.

Натуральную величину эллипса сечения строят путём совмещения плоскости Р с горизонтальной плоскостью проекций.

Развёртка боковой поверхности прямого кругового цилиндра, не усечённого плоскостью, представляет собой прямоугольник с основанием, равным длине окружности основания цилиндра, и высотой, равной высоте цилиндра.

При построении развёртки боковой поверхности цилиндра, пересечённого плоскостью, на развёртке необходимо наносить точки, принадлежащие линии пересечения, и затем эти точки соединять плавной кривой линией (рис. 11.3).

Для этого на развёртке боковой поверхности цилиндра проводят 12 образующих, отстоящих друг от друга на равном расстоянии. За первую образующую рекомендуется выбирать ту, на которой лежит точка А. Затем наносят на все образующие последовательно точки А, 1, 2, 3, 4, 11, 5, B, 6, 7, 8, 9, 12, **10.** Расстояние от этих точек до нижнего (или верхнего) основания проецируется на фронтальную плоскость проекций в натуральную величину. Соединив полученные точки плавной кривой линией, получают развёртку боковой поверхности усечённой части цилиндра.

11.4.4 Задание: построить проекции и натуральную величину фигуры сечения поверхности конуса плоскостью Р (рис. 11.4).

Решение: поверхность прямого кругового конуса относительна к поверхностям вращения и является носителем кривых второго порядка: окружности, эллипса, параболы и гиперболы. Все эти кривые являются плоскими и, следовательно, могут быть получены в результате сечения конической поверхности плоскостью.

На рис. 11.4 приведены фронтальные проекции поверхности прямого кругового конуса, следы фронтально проецирующих секущих плоскостей и указан вид получаемой в сечении кривой. Можно установить признаки, обеспечивающие получение в сечении той или иной кривой второго порядка. Так, если обозначить угол наклона образующей конической поверхности к его оси через $\varphi°$ а угол между секущей плоскостью и той же осью через $\alpha°$, то можно утверждать, что при $\alpha° > \varphi°$ (рис. 11.4, *а)* в сечении получается эллипс (в частном случае, если $\alpha° = 90°$ - окружность), при $\alpha° = \varphi°$ (рис. 11.4,6)- парабола, и при $\alpha° < \varphi°$ (рис. 11.4, *в)* - гипербола.

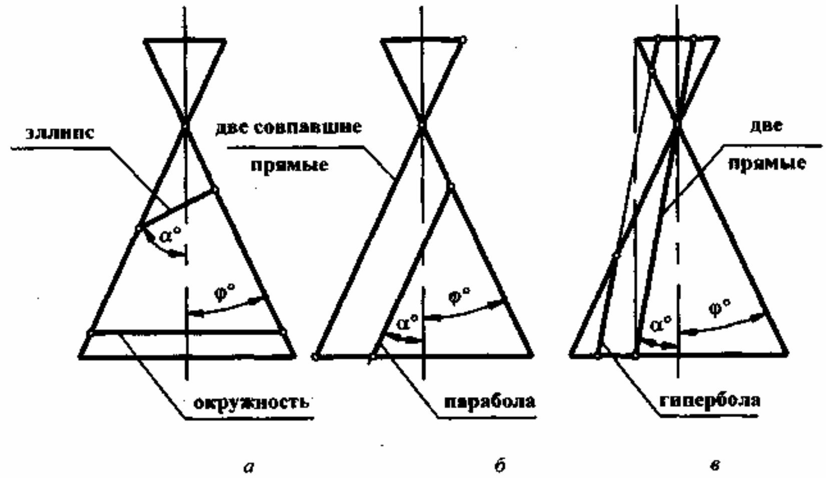


Рис. 11.4

На рис. 11.5 изображен прямой круговой конус и фронтально проецирующая секущая плоскость Р. Угол между секущей плоскостью и осью конической поверхности больше угла наклона образующей конической поверхности к его оси, поэтому в сечении получается эллипс, большая ось которого АВ будет проецироваться на плоскость-$П_2$ без искажения в A_2B_2, а малая ось эллипса 12 спроецируется на плоскость $П_2$ в точку $1_2 \equiv 2_2$, расположенную в середине отрезка $[A_2B_2]$. Величина малой оси 12 определяется из условия принадлежности ее плоскости Р. Для построения горизонтальной проекции малой оси 1_12_1 применяют способ секущих плоскостей. Поверхность конуса рассекают горизонтальной вспомогательной секущей плоскостью Δ и строят на горизонтальной проекции конуса проекцию фигуры сечения — круг. Определяют горизонтальные проекции малой оси эллипса 1_12_1, которые лежат на линии пересечения (окружности) плоскости А и поверхности конуса, и проводят ряд вспомогательных секущих плоскостей для нахождения промежуточных точек 3, 4, 5, 6, принадлежащих фигуре сечения (эллипсу).

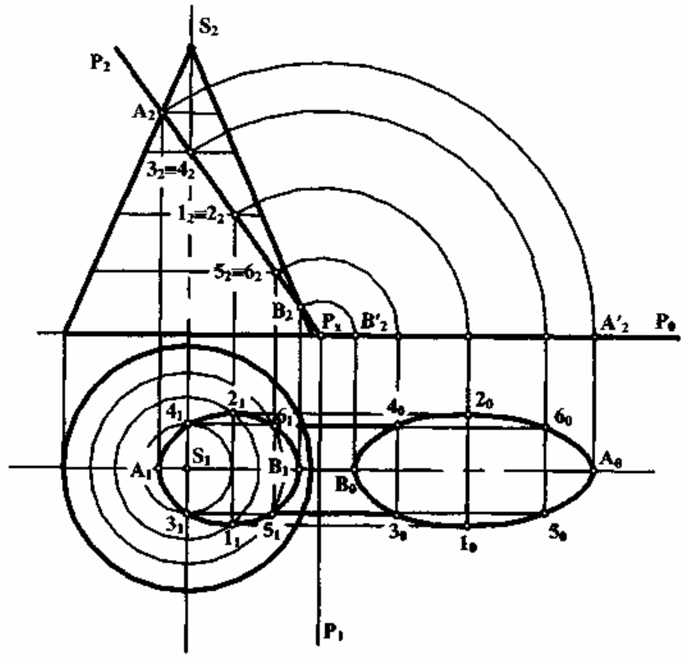


Рис. 11.5

Натуральную величину эллипса находят совмещением плоскости Р с горизонтальной плоскостью проекции. Эллипс $A_0\,5_0\,1_0\,3_0\,B_0\,4_0\,2_0\,6_0$ есть натуральная величина эллипса.

11.4.5 Задание: построить проекции и натуральную величину фигуры сечения поверхности конуса плоскостью Р (рис. 11.6). Построить развёртку усечённой части боковой поверхности конуса.

Решение: на рис. 11.6 изображены прямой круговой конус и секущая плоскость Р общего положения. Ось конуса расположена перпендикулярно к плоскости Π_1 основание конуса лежит на плоскости Π_1.

Решение задачи значительно упростится, если секущая плоскость Р будет проецирующего положения. Для этого преобразуют эпюр

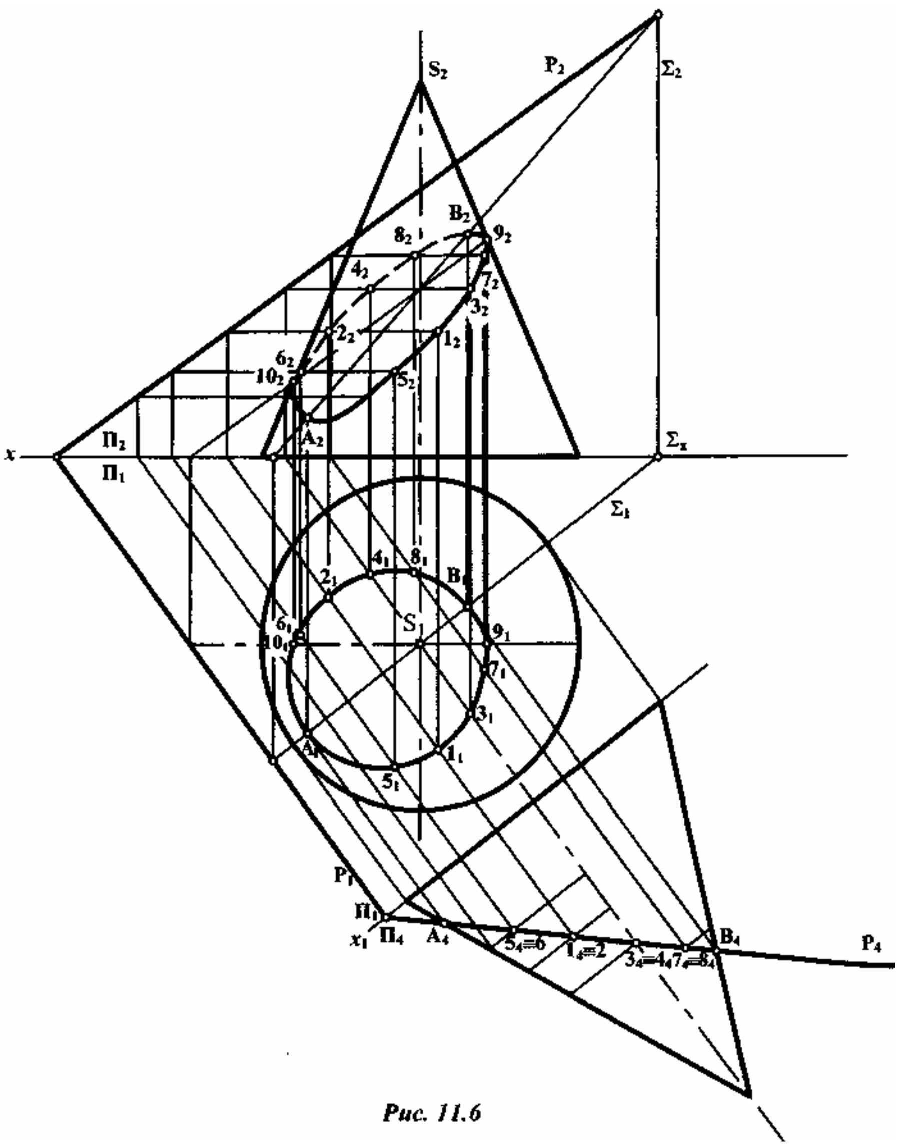


Рис. 11.6

способом перемены плоскостей проекций так, чтобы секущая плоскость P стала фронтально проецирующей. Замену фронтальной плоскости проекций производят для того, чтобы ось конуса осталась перпендикулярной к плоскости $П_1$.

Преобразованный эпюр показывает, что секущая плоскость пересекает только боковую поверхность конуса, а основание не пересекает.

Для нахождения проекций сечения необходимо найти проекции эллипса, получаемого от сечения конической поверхности плоскостью.

На фронтальную плоскость проекции $П_4$ эллипс проецируется в отрезок $[A_4B_4]$. Точки A и B являются низшей и высшей точками эллипса сечения плоскости с конической поверхностью, т. е. концами большой оси эллипса. A_4B_4 — натуральная величина большой оси эллипса. Малая ось эллипса перпендикулярна к большой оси и делит её пополам. Большая ось эллипса A_1B_1 параллельна плоскости проекций $П_4$, а малая ось перпендикулярна $П_4$ и проецируется на неё в точку ($1_4 \equiv 2_4$). Затем задают на эллипсе сечения ещё ряд точек (3, 4, 5, 6, 7, 8). По их фронтальным проекциям на плоскость $П_4$ находят горизонтальные проекции (проводя через точки на конической поверхности образующие). По горизонтальным проекциям находят фронтальные проекции на плоскость проекций $П_2$ (проводя фронтали через проекции точек 1_1 3_1 5_1 7_1).

Для нахождения границы видимости кривой на фронтальной проекции находят проекции очерковых образующих, на которых лежат искомые точки, на фронтальную плоскость проекций $П_4$. На пересечении этих образующих с плоскостью P и будут искомые точки (проекции 9_4 и 10_4). По проекциям 9_4 и 10_4 находят горизонтальные проекции 9_1 и 10_1 а затем фронтальные проекции 9_2 и 10_2. Видимая часть кривой на фронтальной проекции - от точки 10 через точки A, 5, 1, 3, 7 до точки 9. Остальная часть невидимая.

Развёртка боковой поверхности прямого кругового конуса представляет собой сектор круга, радиус которого равен образующей конуса (рис. 11.7). Центральный угол сектора подсчитывается по формуле

$$\varphi = \frac{r}{L} \times 360^0$$

где φ - радиус окружности основания конуса;

L - длина образующей конуса.

Чтобы избежать вычислений, связанных с определением длины Дуги сектора или угла *(р,* обычно вписывают в основание конуса правильный многоугольник (в данном случае 12-угольник) и затем, опи-ав из произвольной точки S дугу радиусом L, откладывают последовательно из любой её точки количество дуг, равное сторонам много угольника. Таким образом, развёртку боковой поверхности прямого кругового конуса заменяют, с достаточной для практики точностью развёрткой правильной пирамиды, вписанной в данный конус.

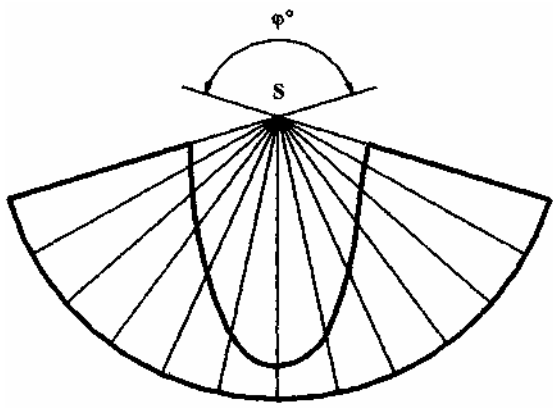


Рис. 11.7

Для нанесения на развёртку боковой поверхности конуса линии сечения (рис. 11.7) переносят на развёртку точки пересечения с секущей плоскостью 12 образующих конуса, которые заменены рёбрами 12-угольной правильной пирамиды. Соединив полученные точки плавной кривой, получают развёртку усечённой части боковой поверхности конуса.

11.4.7 **Задание:** построить проекции фигуры сечения сферы плоскостью Р (рис. 11.10).

Решение: плоскость Р является фронтально проецирующей. На фронтальную плоскость проекций окружность (фигура сечения) проецируется в виде отрезка прямой, на горизонтальную - в виде эллипса. Эллипс строят с помощью точек. Точки 1 и 2 расположены на главном меридиане сферы, а точки 3 и 4 - на экваторе сферы. Для нахождения верхней и нижней (экстремальных) точек 5 и 6 определяют их фронтальные проекции 5_2 и 6_2, которые находятся в середине фронтальной проекции отрезка $[1_2 2_2]$. Через фронтальные проекции точек проводят фронтальную проекцию окружности n_2 (на плоскость Π_2 она проецируется в прямую линию). Рассечение от оси сферы до очерковой образующей определяет радиус окружности R'. Этим радиусом строят горизонтальную проекцию окружности n_1 и на ней находят проекции точек 5 и 6 - 5_1 и 6_1. Промежуточные точки 7 и 8 определяют аналогичным способом.

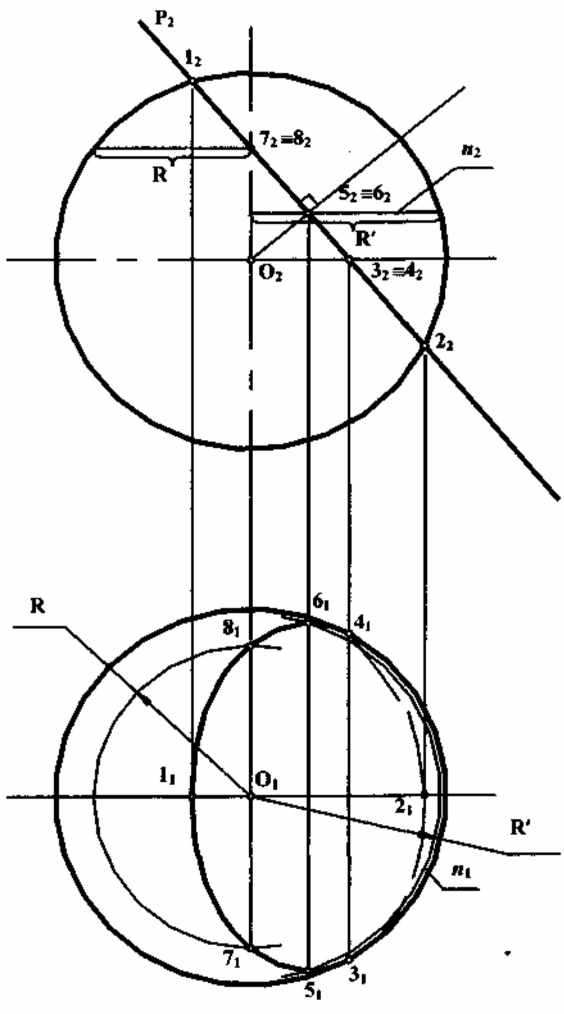


Рис. 11.10

11.4.8 **Задание:** построить проекции и истинную величину фигуры сечения сферы плоскостью общего положения P (P_1 и P_2). Построить развёртку поверхности сферы (рис. 11.11).

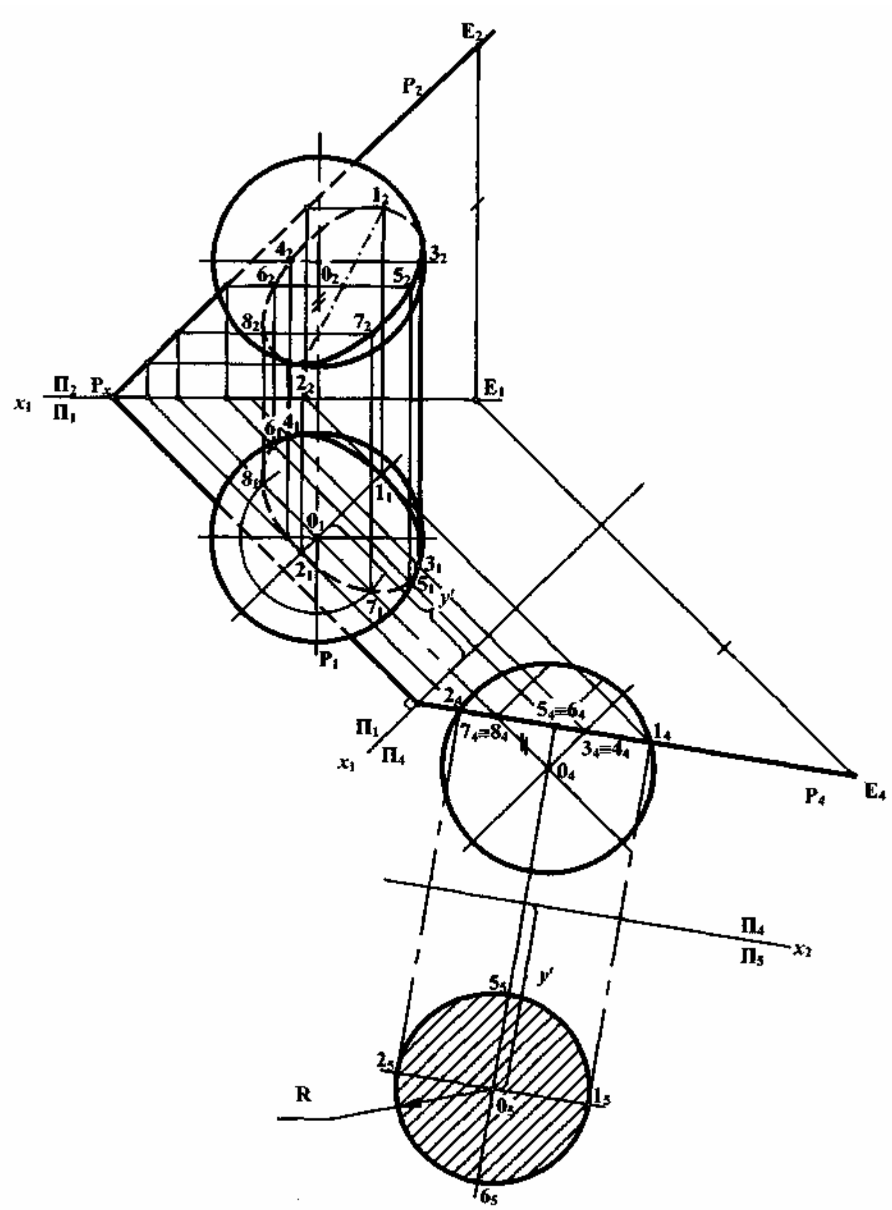


Рис. 11.11

Решение: для решения задачи плоскость общего положения **P(P₁** P₂) преобразуют способом замены плоскостей проекций в проецирующую. Заменяют фронтальную плоскость проекции **П₂** на П₄- Проводят ось x_1 перпендикулярно к горизонтальному следу PI плоскости P. Строят плоскость P в новой системе плоскостей **П₁/П₄.** Для этого берут на фронтальном следе P_2 плоскости P произвольную точку E (E_2). Находят горизонтальную проекцию E_1 точки E, затем строят проекцию точки E и в системе **П₁/ П₄.** Через проекцию E_4 и точку схода следов на оси jq проводят фронтальный след P_4 плоскости проекцию сферы переносят в систему **П₁/П₄.** Для этого проводят через горизонтальную проекцию 0_1, центра 0 сферы линию проекционных связей перпендикулярно к оси x_1 и отмечают на ней (на линии проекционных связей) координату *z* точки 0. Полученную проекцию обозначают 0_4. Затем строят проекцию сферы заданного радиуса в системе **П₁П₄**. После преобразования плоскости P в проецирующее положение задача сводится к решению предыдущей задачи (см. п. 11.4.7), т. е. сначала строят горизонтальную проекцию фигуры сечения, а затем, используя признак принадлежности точки плоскости, строят фронтальную проекцию фигуры сечения сферы плоскостью общего положения.

Для определения натуральной величины фигуры сечения сферы необходимо выполнить вторую замену плоскостей проекций (рис. 11.11). С этой целью преобразовывают плоскость сечения P в плоскость уровня. Для этого проводят ось X_2 параллельно фронтальному следу P_4. Проецируют центр окружности 0 в систему **П₄ /П₅,** отложив координату y' от оси x_2 в направлении проецирования, и отмечают проекцию 0_5. Натуральная величина окружности строится радиусом R, равным половине отрезка [$1_4 2_4$].

Поверхность сферы не может быть развёрнута точно. Для неё строят приближённую развёртку (рис. 11.12).

Поверхность сферы разбивается на равное число частей (рис. 11.12, *а),* например, на 16. Разбивку производят плоскостями, проходящими через один из диаметров шара MN.

Каждую часть поверхности сферы, находящуюся между двумя смежными плоскостями, заменяют частью цилиндрической поверхности с осью, проходящей через центр сферы и перпендикулярной к диаметру MN. Диаметр цилиндрической поверхности принимают равным диаметру сферы.

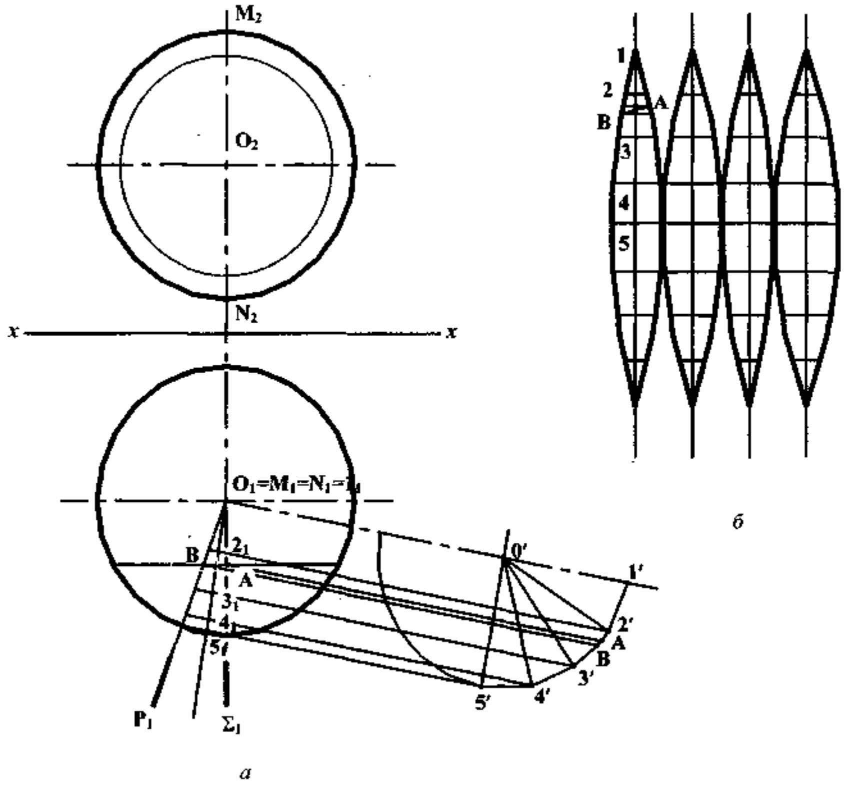


Рис. 11.12

Для наглядности ниже рассмотрено построение только одной из частей поверхности сферы, расположенной между плоскостями P и Σ .

Выделенную часть поверхности сферы заменяют цилиндрической осью ($0_1 0$`, которая перпендикулярна к диаметру MN и плоскости дуги **15.** Дугу **15** делят на равные части (в каждом случае - на четыре). Для построения развёртки откладывают на вертикальной прямой отрезки, равные хордам данных дуг. Величины этих хорд с достаточной степенью точности можно считать равными величинам дуг. По горизонтальной прямой откладывают величины соответствующих образующих цилиндрической поверхности. Полученные точки соединяют кривой линией (рис. 11.12,6).

12 ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ С ПОВЕРХНОСТЬЮ

Для построения точки пересечения прямой с поверхностью через прямую следует провести вспомогательную плоскость и найти линию -пересечения этой плоскости с поверхностью. Точка пересечения (иди точка встречи заданной прямой и построенной линии или фигуры сечения) на поверхности и будет искомой точкой пересечения прямой с поверхностью.

Сложность решения задачи зависит от трудоемкости нахождения линии пересечения, которая определяется следами поверхности и расположением прямой относительно как поверхности, так и плоскости проекций.

Чтобы получить рациональное решение, следует пользоваться наиболее простым способом определения линии пересечения. Этого можно достичь двумя путями:

- выбором положения вспомогательной секущей плоскости;
- переводом секущей прямой в частное положение.

12.1 Вспомогательная секущая плоскость - проецирующая

12.1.1 **Задание:** определить точки пересечения прямой *m* и пирамиды SABC (рис. 12.1).

Решение: для решения задачи прямую *m* заключают во фронтально проецирующую плоскость Σ $(m \in \Sigma)$. Фронтальная проекция фигуры сечения совпадает с фронтальной проекцией следа плоскости Σ_2. Отмечают проекции точек (1_2, 2_2, 3_2) пересечения ребер пирамиды (SA, **SB,** SC), в которых фронтальный след плоскости Σ пересекает эти ребра. Зная положение фигуры сечения (1_2, 2_2, 3_2) на фронтальной проекции, определяют горизонтальную проекцию фигуры сечения ($1_1 2_1$, 3_1). Соединив горизонтальные проекции (1_1,2_1,3_1) точек (1, 2, 3) прямолинейными отрезками (($1_1 2_1$), ($2_1 3_1$), ($3_1 1_1$)), получают фигуру сечения — треугольник 123. Далее определяют точки пересечения горизонтальной проекции фигуры сечения ($1_1 2_1 3_1$) с горизонтальной проекцией m_1 прямой *m* — точки M_1 и N_1. Затем строят фронтальные проекции (M_2 и N_2) точек пересечения прямой *m* с поверхностью пирамиды **SABC.**

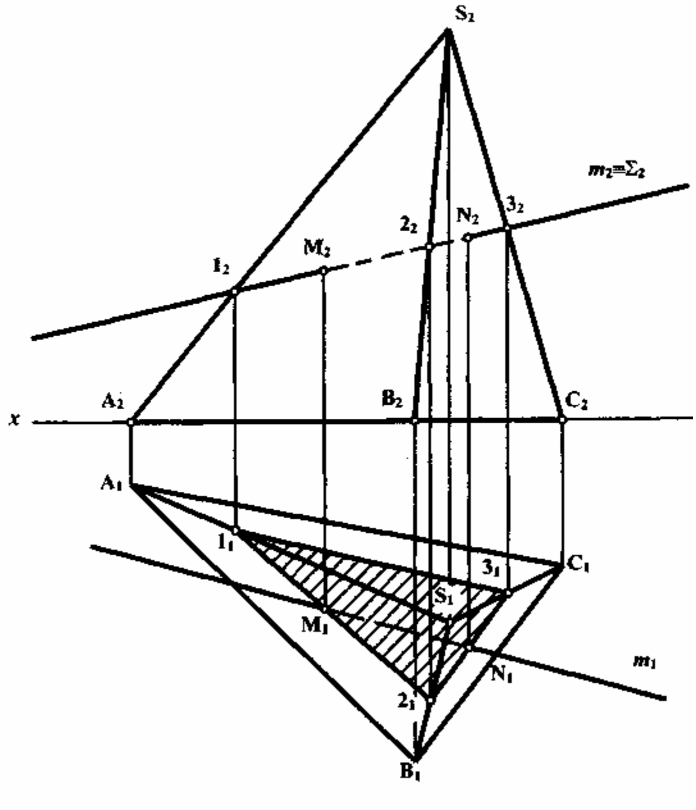


Рис. 12.1

12.1.2 **Задание:** определить точки пересечения прямой *m* с поверхностью прямого кругового цилиндра (рис. 12.2).

Решение: при решении задачи достаточно отметить проекции точек пересечения M и N прямой *m* с поверхностью цилиндра на горизонтальной проекции - точки M_1 и N_1 Так как образующие прямого кругового цилиндра являются горизонтально проецирующими прямыми, фронтальные проекции точек пересечения прямой *m* с поверхностью цилиндра M_2 и N_2 находят с помощью линий проекционной связи, как это показано на рисунке.

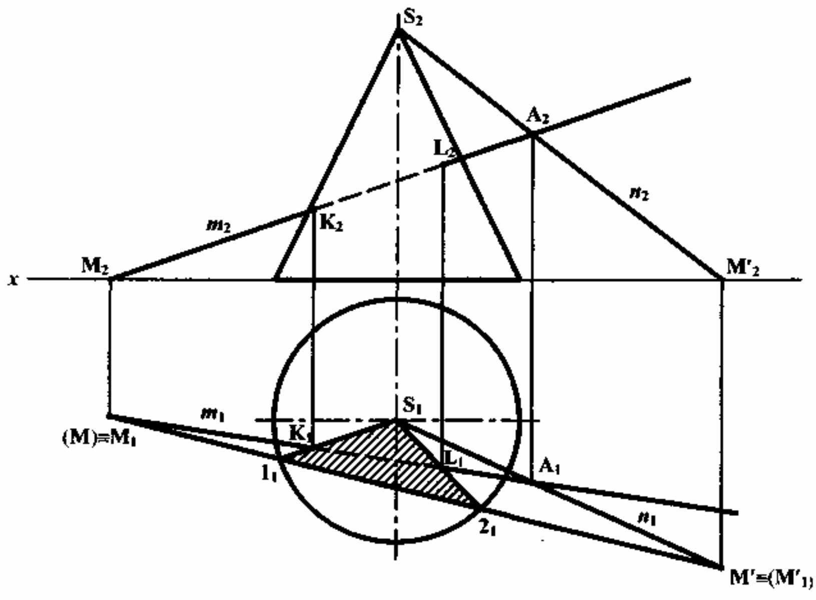


Рис. 12.3

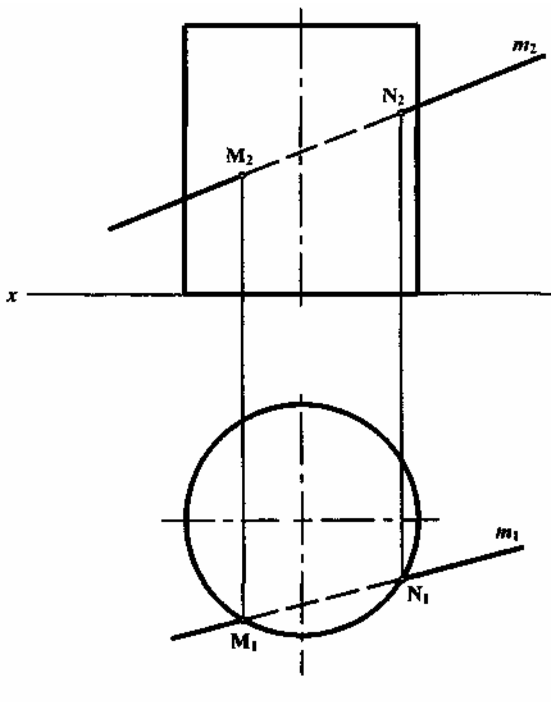


Рис. 12.2

12.2 Вспомогательная секущая плоскость общего положения

Вспомогательную секущую плоскость, проводимую через прямую при пересечении ею какой-либо поверхности, следует выбирать так, чтобы в результате получались простейшие сечения.

Например, при пересечении конической поверхности прямой линией такой плоскостью является плоскость, проходящая через вершину и пересекающая эту поверхность по прямым линиям. При пересечении цилиндрической поверхности прямой линией вспомогательную плоскость целесообразно проводить через заданную прямую параллельно образующим цилиндра.

12.2.1 **Задание:** определить точки пересечения прямой *m с* поверхностью прямого кругового конуса (рис. 12.3).

Решение: прямую *m* заключают в плоскость P, проходящую через вершину конической поверхности S. Плоскость P задана пересекающимися прямыми *m* и n, проходящими через точку A, которая выбирается произвольно на заданной прямой *m.*

Для определения горизонтального следа плоскости P находят горизонтальные следы прямых *m и n.* Следы отмечают точками, например, 1_1 и 2_1, в которых горизонтальный след P_1 плоскости P пересекает основание конической поверхности. Проекции $S_1 1_1$ и $S_2 2_2$ - образующие поверхности конуса, по которым она пересекается плоскостью Р.

Точки K_1 и L_1 - горизонтальные проекции искомых точек пересечения. Зная положение K_1 и L_1 определяют K_2 и L_2.

12.3 Перевод секущей прямой в частное положение

При пересечении поверхности сферы плоскостью в сечении получается окружность, которая проецируется на плоскости проекции в виде эллипсов или прямой и эллипса (если секущая плоскость - проецирующая). В случае, когда секущая плоскость параллельна плоскости проекции, окружность проецируется на эту плоскость проекции без искажения. Поэтому для упрощения решения задачи следует произвольно расположенную прямую перевести в положение, параллельное какой-либо плоскости проекции. Тогда прямую можно заключить в плоскость, параллельную плоскости проекции.

12.3.1 **Задание:** определить точки встречи прямой *m,* заданной отрезком АВ, с поверхностью сферы (рис. 12.4).

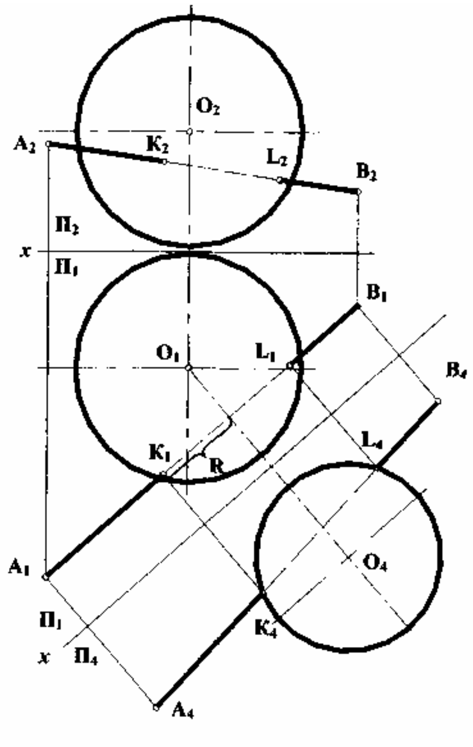


Рис. 12.4

Решение: при решении этой задачи переводят прямую *m* в положение, параллельное плоскости проекции. Для этого вводят новую систему плоскостей $\mathbf{\Pi_4/\Pi_1}$ в которой $m \| \Pi_4$, и переходят от системы $\mathbf{\Pi_2/\Pi_1}$ к системе $\mathbf{\Pi_4 \Pi_1}$**.** Новую ось проекций $x_{1\text{-}4}$ проводят параллельно горизонтальной проекции прямой $\mathbf{A_1B_1}$**.**

Далее от концов горизонтальной проекции прямой, точек A_1 и B_1 проводят прямые, перпендикулярные к новой оси проекций, и на них на плоскости $\mathbf{\Pi_4}$ откладывают координаты Z_A и Z_B т.е. расстояния от оси проекций x до фронтальных проекций точек A_2 и B_2. Новая проекция $\mathbf{A_4B_4}$ будет натуральной длиной прямой АВ. Аналогично находят и центр сферы $\mathbf{O_4}$**.**

В новой системе горизонтально проецирующая плоскость Р $(m \in P)$ пересечет поверхность сферы по окружности радиусом R, которая спроецируется на плоскость HI в отрезок (12), а на плоскость Π_4 в окружность тем же радиусом R. Точки K_4 и L_4 -вспомогательные проекции точек пересечения, по которым определяют вначале K_1 и L_1 а затем K_2 и L_2.

12.4 Плоскость, касательная к поверхности

Плоскость, касательная к поверхности в заданной на поверхности точке, есть множество всех прямых — касательных, проведенных к поверхности через заданную точку.

Для задания плоскости, касательной к поверхности в заданной точке, достаточно провести через эту точку две произвольные линии, принадлежащие поверхности (желательно простые по форме), и к каждой их них построить касательные в точке пересечения этих линий. Построенные касательные определяют касательную плоскость.

12.4.1 **Задание:** построить плоскость P, касательную к поверхности сферы и проходящую через точку A (рис. 12.5).

Решение: плоскость, касательная к сфере, перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания. Поэтому, проведя радиус OA, строят плоскость, задавая ее горизонталью AB и фронталью AC. При этом горизонтальная проекция A_1B_1 перпендикулярна к $\mathbf{A_1\ O_1}$, а фронтальная проекция A_2C_2 перпендикулярна к $\mathbf{A_2O_2}$.

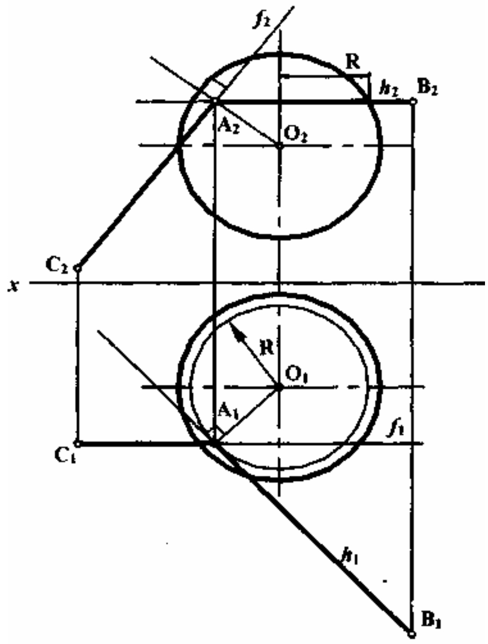


Рис. 12.5

13 ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Предложенные в настоящей работе задания охватывают задачи не на все методы построения линий пересечения поверхностей, а только наиболее распространенные.

Ниже приведены решения типовых задач, когда применены различные способы в зависимости от формы и расположения пересекающихся поверхностей.

13.1 Одна из поверхностей занимает частное (проецирующее) положение

13.1.1 **Задание:** даны две поверхности: φ - тора и P - цилиндра (рис. 13.1). Требуется построить линию их пересечения.

Решение: поверхность цилиндра перпендикулярна к Π_2, следовательно, она проецирующая. В таком случае фронтальная проекция линии пересечения уже известна. Она совпадает с фронтальной проекцией цилиндра. Решение задачи, т.е. построение горизонтальной проекции линии пересечения, сводится к нахождению второй проекции линии, принадлежащей поверхности

φ. Для достижения этой цели на фронтальной проекции фиксируют опорные (1, 2, 4, 9) и промежуточные точки и находят их положения на горизонтальной проекции (рис. 13.2).

Ниже приводится построение горизонтальной проекции только одной точки 1 (рис. 13.1). Из этой точки вниз проводят линию проекционной связи. Одновременно из этой же точки радиусом 01_2 проводят дугу окружности, на которой лежит эта точка, как принадлежащая тору, и находят проекцию этой окружности на горизонтальной проекции тора - это прямая линия, параллельная оси x. Она проходит через точку L_1 (точка пересечения окружности, проходящей через точку 1, с окружностью тора, лежащей на Π_1). Горизонтальная проекция точки 1 находится на пересечении линии проекционной связи, проведенной из точки 1_2, с горизонтальной проекцией окружности тора, на которой лежит точка 1. Остальные точки строят аналогично точке 1 (рис. 13.2).

Точки 4 и 9 определяют видимость линии пересечения на горизонтальной проекции, а точки 1 и 2 наиболее удаленные от контура на горизонтальной проекции.

Эту задачу можно решать и методом вспомогательных секущих плоскостей, который рассматривается в следующем пункте.

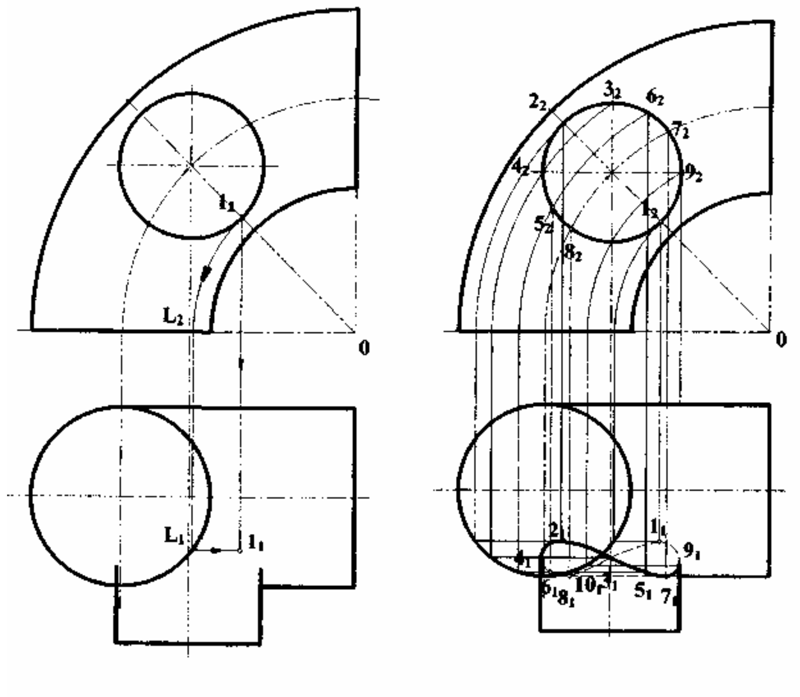


Рис. 13.1 *Рис. 13.2*

13.2 Метод вспомогательных секущих плоскостей

Этот метод применяется для построения линии пересечения двух поверхностей, когда секущие (параллельные) плоскости при пересечении с данными поверхностями образуют простые линии (прямую или окружность).

13.2.1 **Задание:** даны поверхности конуса φ и цилиндра ϕ (рис. 13.3). Требуется построить линию их пересечения.

Решение: ось цилиндра перпендикулярна к плоскости Π_2, следовательно, поверхность цилиндра - проецирующая. В этом случае задача может быть решена так, как это было разобрано в предыдущем (п. 13.1.1) примере. Для этого определяют опорные - наивысшую и низшую точки 1 и 2, которые лежат на пересечении фронтальной проекции цилиндра с очерковой образующей конуса. Их горизонтальные проекции 1_1 и 2_1 принадлежат горизонтальной проекции очерковой образующей конуса (1_1 и 2_1, совпадают с осевой линией конуса). Точки 3 и 4 определяют видимость линий пересечения на горизонтальной проекции. Для определения их горизонтальных проекций через ось цилиндра параллельно Π_1 проводят вспомогательную секущую плоскость Г (ее фронтальный след $Г_2$). Эта плоскость рассечет цилиндр по очерковым образующим, а конус по окружности радиусом R, которая на Π_1 будет проецироваться в натуральную величину. Пересечение этой окружности с очерковыми образующими цилиндра есть не что иное, как горизонтальные проекции опорных точек 3_1 к 4_1 (рис. 13.3).

Построение промежуточных точек аналогично построению точек 3 и 4, только образующие, по которым вспомогательная плоскость будет рассекать цилиндр, не будут очерковыми (рис. 13.4).

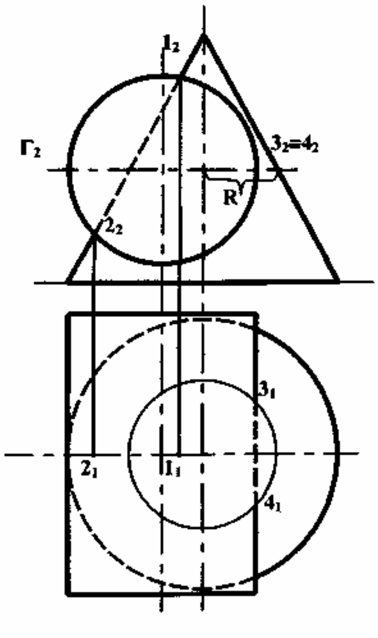


Рис. 13.3

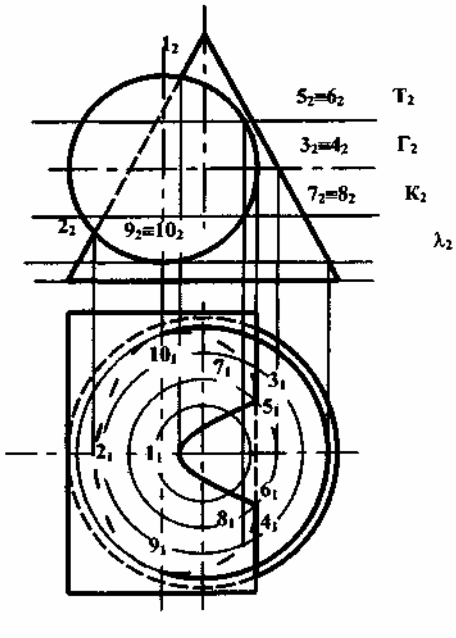


Рис. 13.4

13.3 Метод вспомогательных концентрических сфер

Этот метод применяется для построения линии пересечения двух поверхностей вращения, когда их оси пересекаются и параллельны плоскости проекции. Точка пересечения осей принимается за центр вспомогательных концентрических секущих сфер.

13.3.1 **Задание:** Даны две поверхности вращения - конус и цилиндр, оси которых пересекаются и находятся в одной плоскости, параллельной $\mathbf{П_2}$ (рис. 13.5). Требуется построить линию их пересечения.

Решение: на фронтальной проекции фиксируют точки пересечения меридианов заданных поверхностей вращения 1_2 и 2_2 - они принадлежат искомой линии пересечения. Горизонтальные проекции этих точек находятся на осевой линии конуса и цилиндра - 1, и 2,. Другие точки линии пересечения можно построить, используя концентрические сферические посредники, как вспомогательные секущие поверхности. Из точки пересечения осей фронтальных проекций, как из центра, проводятся сферы. Первая - касательная к проекции конуса, а последующие - большим радиусом (рис. 13.6).

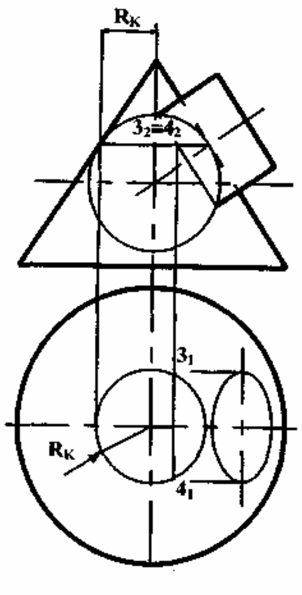


Рис. 13.5

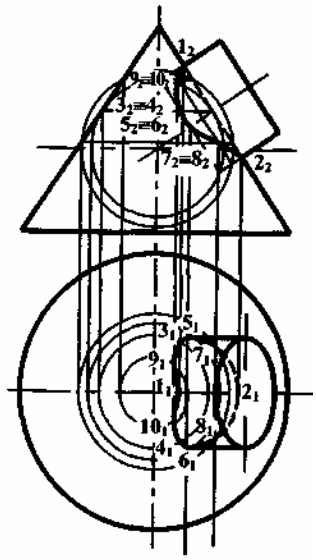


Рис. 13.6

Каждая сфера пересекает обе поверхности по окружностям, фронтальные проекции которых изображаются отрезками прямых линий. Эти проекции пересекаются в точках, являющихся фронтальными проекциями точек искомой линии пересечения поверхностей.

Горизонтальные проекции этих точек определяются по принадлежности одной из поверхностей. В данном случае удобнее их получать по принадлежности конусу. Например, точки 3 и 4 лежат на той же окружности, по которой вспомогательная сфера пересекает конус. Изменяя радиус вспомогательной секущей сферы, находят последовательный ряд точек линии пересечения, соединив которые, получают проекции искомой линии (рис. 13.6). Чтобы определить видимость горизонтальной проекции линии пересечения, на её фронтальной проекции отмечают точки, лежащие на осевой линии цилиндра и принадлежащие линии пересечения. Затем по линиям проекционной связи переносят их на очерковые образующие горизонтальной проекции цилиндра. Точки, лежащие ниже указанных, будут находиться на невидимой части цилиндра.

13.4 Метод эксцентрических сфер

Метод эксцентрических сфер применяется для построения линии пересечении поверхностей вращения, у которых оси расположены в одной плоскости, являющейся плоскостью симметрии. При этом пересекающиеся поверхности должны иметь семейство круговых сечений.

13.4.1 **Задание:** даны две поверхности вращения - тор и конус, оси которых находятся в одной плоскости, параллельной $П_1$ (рис. 13.7). Требуется построить линии их пересечения.

Решение: прежде всего, фиксируют опорные точки пересечения очерковых меридианов 1 и 2. Затем через ось вращения поверхности кольца проводят фронтальный след Σ_2 фронтально проецирующей плоскости Σ. Линия пересечения её с поверхностью тора - окружность. Центр сферы, пересекающей кольцо по окружности, находится на перпендикуляре, восстановленном из центра такой окружности к секущей проецирующей плоскости. Чтобы конус пересекался вспомогательной секущей сферой по окружности, её центр должен находиться на оси конуса. Точка пересечения перпендикуляра к проецирующей плоскости с осью конуса (O_2) выбирается центром вспомогательной секущей сферы. Радиус ее равен расстоянию от центра до точки пересечения меридиана тора со следом плоскости *1.2-* Такая вспомогательная секущая сфера пересекает кольцо и конус вращения по окружностям, фронтальные проекции которых - отрезки прямых. Точка пресечения этих отрезков 3_2 (рис. 13.7) принадлежит искомой линии пересечения поверхностей.

Вспомогательные сферы имеют различные центры на оси конуса вращения; так, при построении проекции - точки 4_2 - O'_2. Горизонтальные проекции точек пересечения строят по принадлежности этих точек к одной из поверхностей, используя параллели, например, конуса.

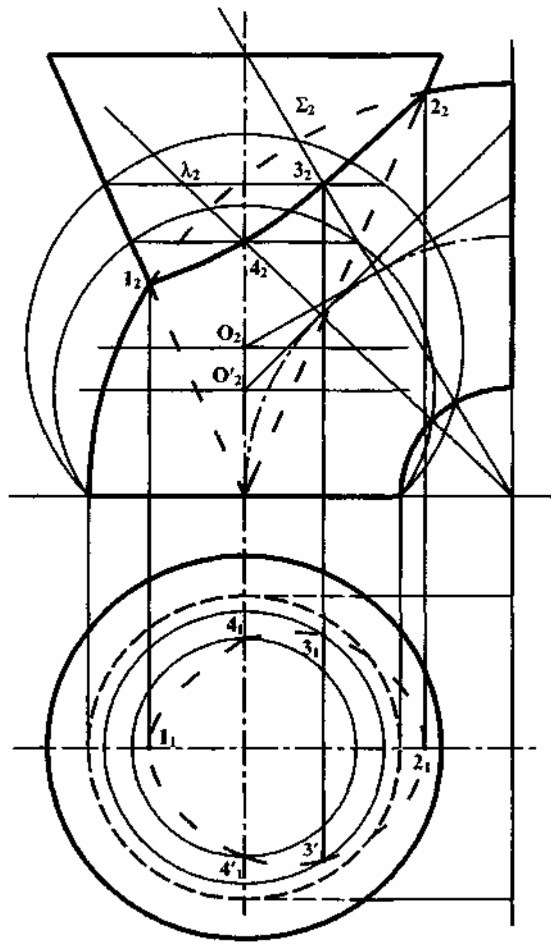


Рис. 13.7

ЛИТЕРАТУРА

1. Гордон В.О. Курс начертательной геометрии / В.О. Гордон, М.А. Семенцов-Огиевский. — М.: Высшая школа, 2000. — 272 с.

2. Гордон В.О. Сборник задач по курсу «Начертательная геометрия» / В.О. Гордон, Ю.Б. Иванов, Т.Е. Солнцева. - М.: Высшая школа,2000.

3. Чекмарев А.А. Инженерная графика. - М.: Высшая школа, 1998.-365с.

4. Фролов С.А. Начертательная геометрия. - М.: Высшая школа,1983.-240 с.

5. Арустамов Х.А. Сборник задач по начертательной геометрии. -М.: Машиностроение, 1978. - 445 с.