I ВВЕДЕНИЕ

1. Содержание и задачи курса начертательной геометрии.

Трудно указать такой вид человеческой деятельности, где, решая ту или иную техническую или нетехническую задачу, не приходилось бы прибегать к помощи изображений машин и механизмов, планов строений и т.п.

К. Маркс указывал, что всякий процесс труда человека заканчивается результатом, который уже в начале этого процесса имелся в его представлении: "Паук совершает операции, напоминающие операции ткача, и пчела постройкой своих восковых ячеек посрамляет некоторых людей - архитекторов. Но самый плохой архитектор от наилучшей пчелы с самого начала отличается тем, что, прежде чем строить ячейку из воска, он уже построил её в своей голове".

Сколь широка и многогранна деятельность человека, столь и различны требования, предъявляемые к форме и содержанию изображений. Одни из них должны производить на глаз человека такое же впечатление, какое производит и сам изображаемый предмет, иначе говоря, изображение должно обладать достаточной наглядностью. В другом случае изображение должно быть, в первую очередь, геометрически равноценно оригиналу, оно должно давать полную геометрическую и размерную характеристику изображаемого предмета. Этому требованию должен отвечать, например, всякий машиностроительный чертёж.

Наконец, к изображению могут быть предъявлены оба указанных условия одновременно - наглядность изображения должна сочетаться с геометрической равноценностью оригиналу.

Изображения различных предметов и объектов не являются самоцелью, они дают возможность решать инженеру по ним различные технические задачи.

Однако не всякое изображение может быть использовано для решения технических задач. Для этого оно, в первую очередь, должно быть геометрически равноценно изображаемому объекту, то есть, построено по определённому геометрическому закону. Вопросами исследования геометрических основ построения изображений предметов на плоскости, вопросами решения пространственных геометрических задач при помощи изображений занимается одна из ветвей геометрии - НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ.

Начертательная геометрия относится к числу математических наук. Для неё характерна та общность методов, которая свойственна каждой математической науке. Методы начертательной геометрии находят самое широкое применение в объектах изучения самой различной природы: в механике, архитектуре и строительстве, химии, геодезии, геологии, кристаллографии и т.д.

Но наибольшее значение и применение методы начертательной геометрии нашли в различных областях техники при составлении различного вида технических чертежей: машиностроительных, строительных, различного рода карт и т.д. Начертательная геометрия, таким образом, является звеном, соединяющим математические науки с техническими.

Начертательная геометрия входит в группу общетехнических дисциплин, составляющих основу всякого инженерного образования. Она учит грамотно владеть выразительным техническим языком - языком чертежа, умению составлять и свободно читать чертежи, решать при помощи чертежей различные инженерно-технические задачи.

Кроме того, изучение начертательной геометрии способствует развитию у студентов пространственных представлений и пространственного воображения - качеств, характеризующих высокий уровень инженерного мышления и необходимых для решения прикладных задач.

В процессе изучения начертательной геометрии достигаются и другие цели, расширяется общенаучный кругозор студентов, развиваются навыки логического мышления, внимательность, наблюдательность, аккуратность и другие качества, развитие которых является одной из задач обучения и воспитания в высшей технической школе.

Предметом начертательной геометрии (в узком смысле) является изучение теории построения плоских моделей пространств и теории и практики решения пространственных задач на таких плоских моделях.

Цели курса:

1. Научить пространственно мыслить и отображать на плоскости трёхмерные геометрические образы (фигуры).
2. Развить способность мысленного восприятия пространственного геометрического образа по его отображению на плоскости, т.е. научить читать чертёж.
   (Таким образом, мы решаем две задачи: прямую и обратную. Объёмный предмет отображаем на плоскости - прямая задача. По плоскому чертежу представляем объёмную форму предмета - обратная задача. Прочесть чертёж - это представить себе пространственное изображение предмета.)
3. Сообщить знания о методах решения на плоскости пространственных метрических и позиционных задач.

2. Роль русских и советских учёных в разработке и развитии методов изображений.

Сведения и приёмы построений, обуславливаемые потребностью в плоских изображениях пространственных форм, накапливались постепенно с древних времён. В течение продолжительного периода плоские изображения выполнялись как изображения наглядные. С развитием техники первостепенное значение приобрёл вопрос о применении метода, обеспечивающего точность и удобоизмеримость изображений, т.е. возможность точно установить место каждой точки изображения относительно других точек или плоскостей и путём простых приёмов определить размеры отрезков линий и фигур. Постепенно накопившиеся отдельные правила и приёмы построения таких изображений были приведены в систему и развиты в труде французского учёного Монжа, изданном в 1799 году. Изложенный Гаспаром Монжем (1746-1818) метод - метод ортогонального проецирования - обеспечивал выразительность, точность и удобоизмеримость изображений предметов на плоскости, был и остаётся основным методом составления технических чертежей.

Чертёж - язык инженера, начертательная геометрия - грамматика этого языка.

В нашей стране начертательную геометрию начали преподавать с 1810 года в ЛИЖТе - первом ВУЗе страны, только что организованном. Лекции там читал Я.А. Севастьянов (1796-1849), с именем которого связано появление первого оригинального труда под названием "Основания начертательной геометрии" (1821 г.), в основном посвящённого изложению метода Монжа.

Крупный след в развитии начертательной геометрии в России в XIX веке оставили Н.И. Макаров (1824-1904) (адмирал Макаров, погибший в Порт-Артуре) и В.И. Курдюнов (1853-1904).

Если начертательная геометрия как предмет возникла из нужд практики и в середине XIX века она расширила свои разделы, то к началу XX века аналитические методы, применённые в начертательной геометрии, вышли на первый план, точность графических методов не удовлетворялась и начертательная геометрия пошла на убыль. Последними книгами были книги Н.А. Рышина (1877-1942) и В.О. Гордона.

С появлением трудов Н.Ф. Четверухина (1891-1973) начертательная геометрия была выведена из застоя. Н.Ф. Четверухин стал рассматривать начертательную геометрию как самостоятельную науку (не связанную с черчением). Он первый увидел, что методами начертательной геометрии можно решать сложные конструктивные задачи. Появилась "Прикладная геометрия" и начался её расцвет. За период с конца 40-х годов начертательная геометрия развивалась и расширялась. В науке большая роль принадлежит И.И. Котову (1905-1975) и его ученикам. После смерти Н.Ф. Четверухина начался процесс сокращения часов по начертательной геометрии и произошел застой. В 1982 г. вопрос в ВАКе был решён положительно и предмет восстановлен.

3. Виды проецирования:

Методом начертательной геометрии является графический метод, основанный на операции проецирования - бинарная конструктивная модель пространства, пространственных форм и отношений, т.е. метод плоскостных (бинарных, двумерных) моделей пространств.

Нам необходимо строить плоскостные модели пространств и по ним уметь решать разнообразные пространственные задачи. Если трёхмерные пространственные формы сформированы на двухмерной плоскости - это чертёж. Чертёж - это определённая совокупность точек и линий на плоскости. Начертательная геометрия занимается построением чертежей пространственных форм и отношений. Какие же двухмерные чертежи могут быть моделями, которые бы отображали свойства пространства, пространственные формы и отношения?

Тут возникает два вопроса:

1. Как образовать, как получить такие модели? (Как строить такие чертежи, чтобы они были отображением пространства)
2. Что изображать на этой модели (чертеже), чтобы эта модель могла отражать пространственные формы и отношения?

Отвечая на первый вопрос, можно сказать, что каждый чертёж построен по методу проекций. Существует два вида проецирования: центральное и параллельное.

3.1 Центральное проецирование.

Центральное проецирование - наиболее общий случай получения проекций геометрических фигур. Сущность его состоит в следующем:

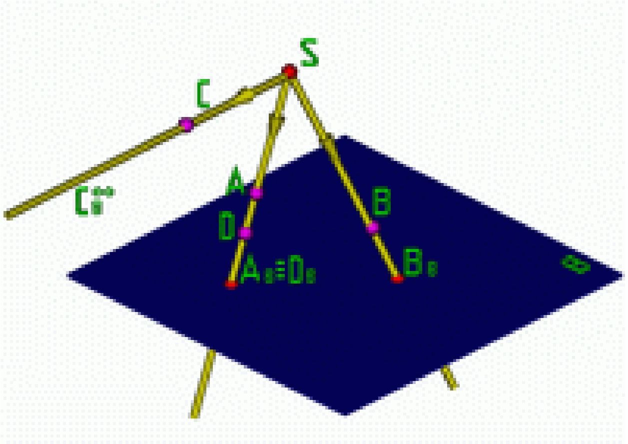


Рис.1

Пусть даны плоскость Θ(тэта) и точка $S \notin \Theta$(рис.1). Возьмём в пространстве произвольную точку A, причём $A \notin S \wedge A \not\equiv S$. Нам нужно построить центральную проекцию точки A. Для этого через заданные точки S и A проведём луч [SA). Центральной проекцией точки A будет точка пересечения луча [SA) с плоскостью Θ.

$$[SA) \cap \Theta = A^{\Theta}$$

Плоскость Θ называют плоскостью проекций, точку S - центром проекции, полученную точку A^{Θ} - центральной проекцией точки A на плоскость Θ, $[SA^{\Theta})$ - проецирующим лучом.

Аппарат центрального проецирования задан, если задано положение плоскости проекций Θ и центра проекций S. Если аппарат проецирования задан, то всегда можно определить положение центральной проекции любой точки пространства на плоскости проекций.

Например: Дана точка B. Проведём проецирующий луч [SB) и определим точку встречи его с плоскостью Θ. Это и есть центральная проекция B^{Θ} точки B при заданном аппарате проецирования (Θ,S).

Если точка C расположена так, что проецирующий луч $[SC) \parallel \Theta$, то он пересечёт плоскость проекций в несобственной точке C_∞^{Θ}.

При заданном аппарате проецирования (Θ,S) каждая точка пространства будет иметь одну и только одну центральную проекцию (т.к. через две различные точки можно провести одну и только одну прямую). Обратное утверждение не имеет смысла, так как точка A^{Θ} может быть центральной проекцией любой точки, принадлежащей прямой (A^{Θ} S) (Например центральные проекции точек A и D совпадают).

Отсюда следует, что одна центральная проекция точки не определяет положение точки в пространстве.

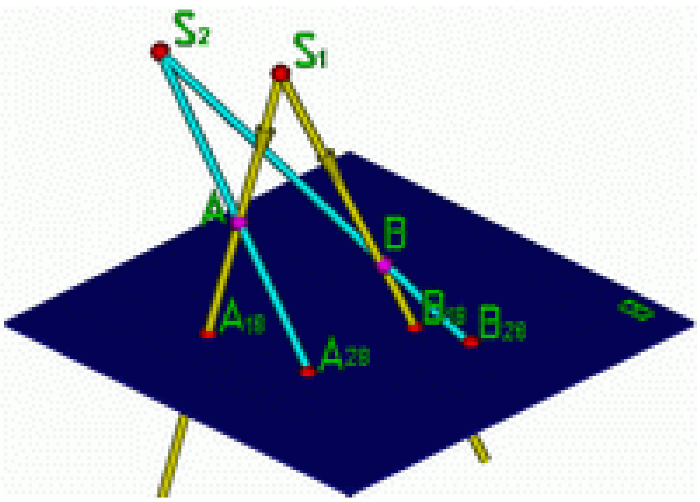


Рис.2

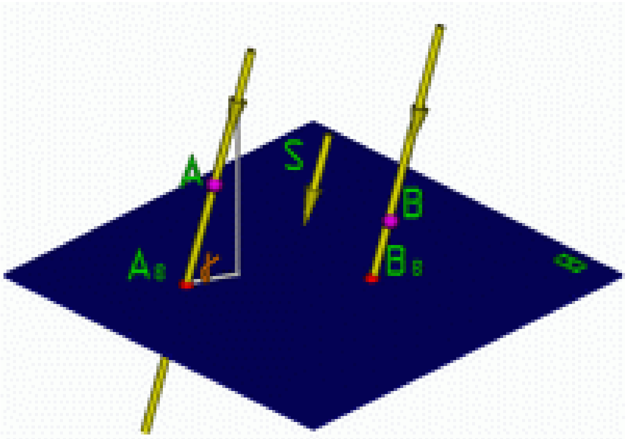
Для определения положения точки в пространстве необходимо иметь две центральные проекции точки, полученные из двух различных центров проецирования (рис.2).

Достоинство центрального проецирования - наглядность. Недостаток - степень искажения изображения зависит от расстояния центра проекций до плоскости проекций, поэтому центральное проецирование неудобно для простановки размеров.

В машиностроительном черчении применяется параллельное проецирование.

3.2 Параллельное проецирование.

Параллельное проецирование является частным случаем центрального проецирования, когда центр проекций лежит в несобственной точке S_∞, поэтому все проецирующие лучи параллельны.



Аппарат параллельного проецирования задан, если задано положение плоскости проекций θ и направление проецирования S.

Рис.3

Все свойства центрального проецирования справедливы для параллельного проецирования:

1. При задании аппарата параллельного проецирования каждая точка пространства имеет одну и только одну параллельную проекцию. Обратное утверждение не имеет места.
2. Для задания точки в пространстве необходимо иметь две её параллельные проекции, полученные при двух различных направлениях проецирования.

Параллельное проецирование делится на:

- Прямоугольное - γ=90° (γ - угол падения проецирующего луча к плоскости проекций).
- Косоугольное - $\gamma \neq 90°$.

Основные инвариантные (независимые) свойства параллельного проецирования.

При параллельном проецировании нарушаются метрические характеристики геометрических фигур (происходит искажение линейных и угловых величин), причём степень нарушения зависит как от аппарата проецирования, так и от положения проецируемой геометрической фигуры в пространстве по отношению к плоскости проекции.

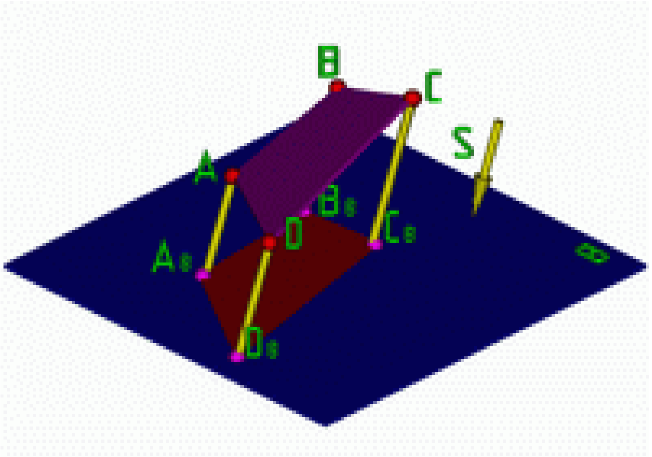


Рис.4

Пример:
$\Omega(A,B,C,D) \nparallel \Theta$
$|AB| \neq |A^{\Theta} B^{\Theta}|$, $|BC| \neq |B^{\Theta} C^{\Theta}|$ и т.д.
$\angle|DAB| \neq \angle|D^{\Theta} A^{\Theta} B^{\Theta}|$, $\angle|ABC| \neq \angle|A^{\Theta} B^{\Theta} C^{\Theta}|$ и т.д.

Но наряду с этим, между оригиналом и его проекцией существует определённая связь, заключающаяся в том, что некоторые свойства оригинала сохраняются и на его проекции. Эти свойства называются инвариантными (проективными) для данного способа проецирования.

В процессе параллельного проецирования (получения проекций геометрической фигуры по её оригиналу) или реконструкции чертежа (воспроизведения оригинала по заданным его проекциям) любую теорему можно составить и доказать, базируясь на инвариантных свойствах параллельного проецирования, которые в начертательной геометрии играют такую же роль, как аксиомы в геометрии.

Следовательно, можно утверждать, что в начертательной геометрии существуют две системы аксиом:

- одна система используется при параллельном проецировании - это суть инвариантные свойства параллельного проецирования.
- другая система используется, когда проекции построены и решается плоская задача (задача на плоскости) - это аксиомы евклидовой геометрии.

Отсюда ясно, насколько важно выяснить и хорошо усвоить эти инвариантные свойства.

---

1. Проекция точки есть точка.

$$A \xrightarrow{P_S^{\Theta}} A^{\Theta}$$

2. Проекция прямой линии на плоскость есть прямая линия.

$$(\forall l)(l \nparallel S)[l \xrightarrow{P_S^{\Theta}} l^{\Theta}]$$

(Для всех прямых l, не параллельных направлению проецирования, проекция прямой есть прямая.)

3. Если в пространстве точка инцидентна (принадлежит) линии, то проекция этой точки принадлежит проекции линии.

$$(\forall A,m)[A \in m \Rightarrow A^{\Theta} \in m^{\Theta}]$$

Следствие: Если прямые пересекаются в точке K, то проекции прямых пересекаются в проекции точки - K^{Θ} .

4. Проекции взаимно параллельных прямых также взаимно параллельны.

$$l_1 \parallel l_2 \Rightarrow l_1^{\Theta} \parallel l_2^{\Theta}$$

5. Отношение отрезков прямой равно отношению проекций этих отрезков.

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|A^{\Theta}B^{\Theta}|}{|B^{\Theta}C^{\Theta}|}$$

6. Если плоская фигура параллельна плоскости проекций, то на эту плоскость она проецируется в конгруэнтную фигуру.

$$\Omega \parallel \Theta \Rightarrow \Omega^{\Theta} \cong \Omega$$

При параллельном переносе плоскости проекций величина проекций не изменится, следовательно, мы можем не рисовать положение плоскости проекций.

Для построения обратимого чертежа необходимо иметь две взаимосвязанные проекции оригинала.

Поэтому только прямоугольное (ортогональное) проецирование, по крайней мере, на две взаимно перпендикулярных плоскости проекций является основным методом построения технического чертежа (метод Монжа).

Ортогональное (прямоугольное) проецирование обладает рядом преимуществ перед центральным и параллельным (косоугольным) проецированием.

К ним в первую очередь следует отнести:

- простоту геометрических построений для определения ортогональных проекций точек
- возможность при определённых условиях сохранять на проекциях форму и размеры оригинала.

Поэтому этот метод удобен для простановки размеров.

Пространственная модель координатных плоскостей проекций.

Положение точки (а следовательно, и любой геометрической фигуры) в пространстве может быть определено, если задана координатная система отнесения (наиболее удобна - декартова). Рассмотрим макет из трёх взаимно перпендикулярных плоскостей.

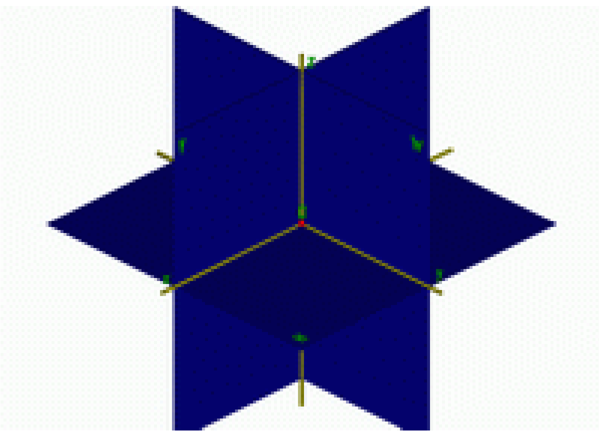


Рис.5

H (П1) - горизонтальная плоскость проекций
V (П2) - фронтальная плоскость проекций
W (П3) - профильная плоскость проекций
Плоскости проекций при пересечении образуют оси координат:
x - ось абсцисс
y - ось ординат
z - ось аппликат
Оси координат при пересечении образуют начало координат O (origo - начало).

Плоскости проекций бесконечны. Они делят пространство на 8 частей - октантов.

В начертательной геометрии часто применяется система V/H - двух плоскостей проекций. При этом пространство делится на 4 четверти - квадранты.

Недостаток пространственной модели - её громоздкость, поэтому пользуются плоскостной моделью координатных плоскостей проекций - эпюром. Построение эпюра рассмотрим на примере построения эпюра точки.

II ТОЧКА И ПРЯМАЯ ЛИНИЯ

1. Проецирование точки на две плоскости проекций.

Точка - основное, неопределяемое понятие геометрии. Она не может быть определена более элементарными понятиями. Точка не имеет размеров.

Пусть заданы точка A и три взаимно перпендикулярных плоскости проекций. Построим проекции точки в первом октанте (рис.6).

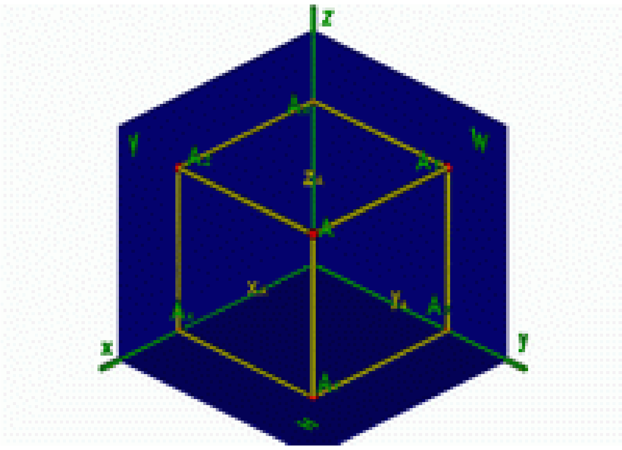


Рис.6

Из точки A опустим перпендикуляры на плоскости проекций. Положение точки A в пространстве определяется тремя координатами (x_A, y_A, z_A), показывающими величины расстояний, на которые точка удалена от плоскости проекций.
A_1,A_2,A_3 - ортогональные проекции точки A.
A_1 - горизонтальная проекция точки A
A_2 - фронтальная проекция точки A
A_3 - профильная проекция точки A

Отрезки:

- $[AA_3]=[OA_x]$ - абсцисса точки A
- $[AA_2]=[OA_y]$ - ордината точки A
- $[AA_1]=[OA_z]$ - аппликата точки A

Прямые (AA_1),(AA_2),(AA_3) - проецирующие прямые (проецирующие лучи):

- (AA_1) - горизонтально проецирующая прямая
- (AA_2) - фронтально проецирующая прямая
- (AA_3) - профильно проецирующая прямая

2. Проецирование точки на три плоскости проекций.

Чтобы получить эпюр точки, нужно преобразовать пространственный макет.
Фронтальная проекция точки A - A_2 остаётся на месте, как принадлежащая плоскости V, которая не меняет своего положения.
Горизонтальная проекция A_1 вместе с горизонтальной плоскостью проекций H, совмещаемой с плоскостью чертежа, опустится вниз и расположится на одном перпендикуляре к оси x с фронтальной

проекцией A_2.
Профильная проекция A_3 будет вращаться вправо вместе с профильной плоскостью проекций W до совмещения с плоскостью чертежа. При этом A_3 будет принадлежать перпендикуляру к оси z, проведённому через A_2, и удалена от оси z на такое же расстояние, на которое горизонтальная проекция A_1 удалена от оси x.

Таким образом, ЭПЮРОМ (комплексным чертежом точки) называется плоское изображение, полученное в результате ортогонального проецирования на две или несколько взаимно перпендикулярных плоскостей путём последующего совмещения этих плоскостей с одной плоскостью проекций (рис.7).

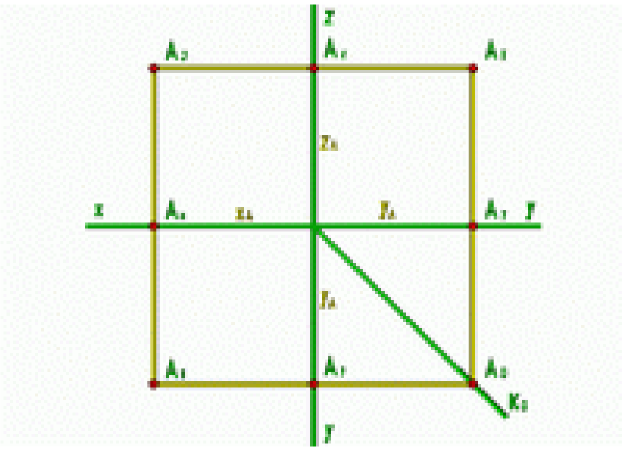


Рис.7

Биссектрису угла между осями y называют постоянной прямой K_o эпюра Монжа.

Полученная модель (эпюр) несёт такую же информацию, какая содержится в пространственном макете.

Действительно, чтобы определить положение точки A в пространстве, необходимо знать 3 её координаты (x,y,z) - длины отрезков $[AA_3]$,$[AA_2]$,$[AA_1]$. Величины этих отрезков могут быть определены на эпюре.
$[AA_3]=[A_1A_y]=[A_2A_z]$
$[AA_2]=[A_1A_x]=[A_3A_z]$
$[AA_1]=[A_2A_x]=[A_3A_y]$

Горизонтальная проекция точки A определяется абсциссой x и ординатой y, фронтальная - x и z, профильная - y и z, т.е.
$A_1(x,y)$
$A_2(x,z)$
$A_3(y,z)$

Отсюда следует, в частности, что:

1. положение точки в пространстве вполне определяется положением её двух ортогональных проекций (т.к. по двум любым заданным ортогональным проекциям точки всегда можно построить недостающую её третью ортогональную проекцию)
2. горизонтальная и фронтальная проекции любой точки принадлежат одному перпендикуляру (одной линии связи) к оси x
   горизонтальная и профильная проекции любой точки принадлежат одному перпендикуляру (одной линии связи) к оси y
   фронтальная и профильная проекции любой точки принадлежат одному перпендикуляру (одной линии связи) к оси z

Построение безосного эпюра точки.

В тех случаях, когда нет необходимости в определении положения точки (или любой другой геометрической фигуры) относительно координатной системы плоскостей проекций, можно не указывать на эпюре оси координат, т.е. для безосного чертежа плоскости проекций принимаются неопределёнными до параллельного переноса (могут перемещаться параллельно самим себе) а значит, не рисуются и не обозначаются на эпюре.

Лекции: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

3. Проецирование прямой. Точка на прямой. Следы прямой.

При ортогональном проецировании на плоскость прямая проецируется в прямую (2-е инвариантное свойство параллельного проецирования). Поэтому для определения проекции прямой достаточно знать проекции двух нетождественных точек, принадлежащих прямой.

Если отрезок [AB], определяющий прямую l занимает произвольное положение по отношению к плоскостям проекций (угла наклона прямой l к плоскостям проекций отличаются от 0° и 90°), то такая прямая называется прямой общего положения.

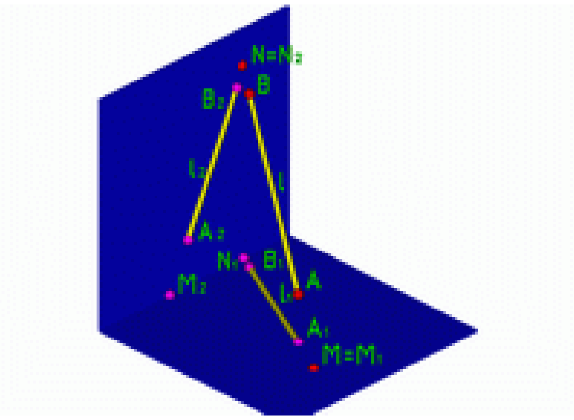


Рис.1

A_1B_1 - горизонтальная проекция отрезка прямой [AB]
A_2B_2 - фронтальная проекция отрезка прямой [AB]

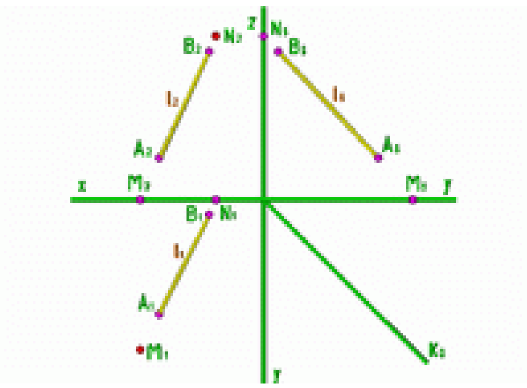


Рис.2

$|A_1B_1| < |AB|$
$|A_2B_2| < |AB|$
$|A_3B_3| < |AB|$

На эпюре проекции прямой общего положения занимают также произвольные положения относительно осей координат.

Прямую можно задать на эпюре не только проекциями её отрезка, но и проекциями некоторой произвольной части прямой без фиксации её концов. В этом случае прямые обозначаются строчными латинскими буквами.

Точка на прямой.

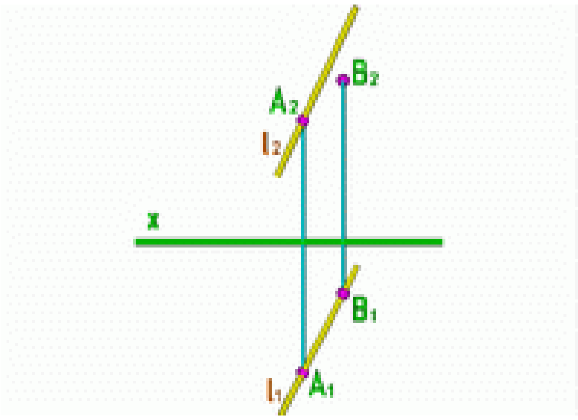


Рис.3

Если в пространстве точка принадлежит прямой, то проекции этой точки будут лежать на проекциях прямой. $A \in l$; $B \notin l$.

Пример. Задача.
Дано: Прямая АВ общего положения задана на эпюре своими проекциями.
Найти: На этой прямой точки, равноудалённые от плоскостей проекций V и H.

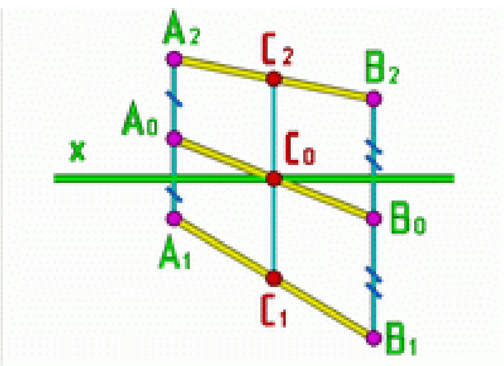


Рис.4

Метод средней линии.
$A_1A_0 = A_0A_2$
$B_1B_0 = B_0B_2$

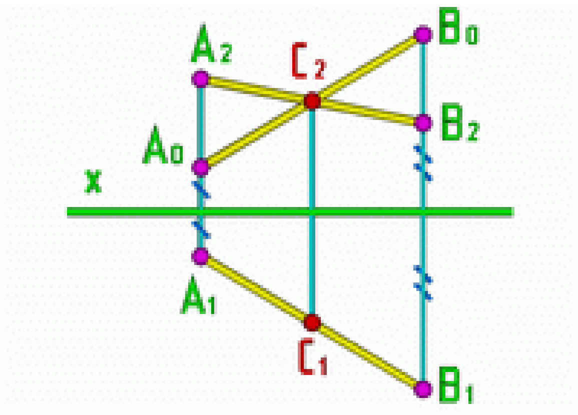


Рис.5

Метод наложения.
$A_1A_x = A_xA_0$
$B_1B_x = B_xB_0$

Следы прямой.

Точка пересечения прямой с плоскостью проекций называется следом прямой.

Прямая общего положения пересекает все три плоскости проекция, следовательно, она имеет три следа:
M - горизонтальный след
N - фронтальный след
P - профильный след

$(M \in l) \wedge (M \in H) \Rightarrow M \equiv M_1$

M_1 - горизонтальная проекция горизонтального следа
M_2 - фронтальная проекция горизонтального следа
N_1 - горизонтальная проекция фронтального следа
N_2 - фронтальная проекция фронтального следа

Для нахождения горизонтального следа прямой необходимо:

1. На эпюре продолжить фронтальную проекцию прямой до пересечения её с осью x.
2. Из точки пересечения M_2 - фронтальной проекции горизонтального следа, провести перпендикуляр до пересечения с горизонтальной проекцией прямой.
3. Точка пересечения M_1 - горизонтальная проекция горизонтального следа, которая совпадает с самим горизонтальным следом M.

Алгоритм определения горизонтального следа выглядит так:
$M = (l_2 \cap x = M_2)$; $(a \perp x, M_2 \in a)$; $a \cap l_1 = M_1$

Для нахождения фронтального следа прямой необходимо:

1. На эпюре продолжить горизонтальную проекцию прямой до пересечения её с осью x.
2. Из точки пересечения N_1 - горизонтальной проекции фронтального следа, провести перпендикуляр до пересечения с фронтальной проекцией прямой.
3. Точка пересечения N_2 - фронтальная проекция фронтального следа, которая совпадает с самим фронтальным следом N.

Алгоритм определения фронтального следа выглядит так:
$N = (l_1 \cap x = N_1)$; $(b \perp x, N_1 \in b)$; $b \cap l_2 = N_2$

Аналогично определяется профильный след прямой:

1. l_2 продолжить до пересечения с осью z.
2. Из точки пересечения P_2 - фронтальной проекции профильного следа, провести перпендикуляр до пересечения с профильной проекцией прямой.

$P = (l_2 \cap z = P_2)$; $(c \perp z, P_2 \in c)$; $c \cap l_3 = P_3$ или $P = (l_1 \cap z = P_1)$; $(d \perp y, P_1 \in d)$; $d \cap l_3 = P_3$

4. Натуральная величина отрезка прямой. Углы наклона прямой к плоскостям проекций.

Ортогональная проекция отрезка [AB] прямой на плоскость проекций будет конгруэнтна оригиналу лишь в том случае, когда отрезок параллелен этой плоскости (свойство 6), т.е.

$([AB] \parallel H) \Rightarrow [A_1B_1] \equiv [AB]$

$([CD] \parallel V) \Rightarrow [C_2D_2] \equiv [CD]$

$([EF] \parallel W) \Rightarrow [E_3F_3] \equiv [EF]$

Во всех остальных случаях отрезок проецируется на плоскость проекции с искажениями. При этом ортогональные проекции отрезка всегда меньше его действительной величины:

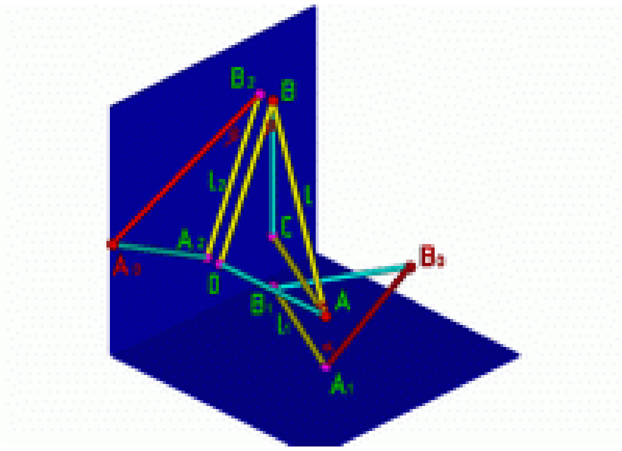
$|A_1B_1| < |AB|$

$|A_2B_2| < |AB|$

$|A_3B_3| < |AB|$

Пусть задана система плоскостей V/H и отрезок [AB], заданный своими проекциями. Требуется на эпюре определить его натуральную величину |AB| и углы наклона α к плоскости H и β к плоскости V.

Угол наклона прямой к плоскости - есть угол между прямой и её проекцией на эту плоскость.



$[BD] \parallel [A_2B_2]$
$[AC] \parallel [A_1B_1]$
$[B_1B_0] \equiv [BC]$
$[A_2A_0] \equiv [AD]$
$\Delta A_1B_1B_0 \equiv \Delta ABC$
$\Delta A_2B_2A_0 \equiv \Delta ABD$

Рис.6

Для графического определения на эпюре Монжа действительной (натуральной) величины отрезка достаточно построить прямоугольный треугольник, взяв за один его катет горизонтальную (фронтальную, профильную) проекцию отрезка, а за другой катет - разность удаления концов отрезка от горизонтальной (фронтальной, профильной) плоскости проекций. Тогда гипотенуза треугольника будет равна натуральной величине отрезка, а угол между гипотенузой и проекцией будет равен углу наклона прямой к этой плоскости.

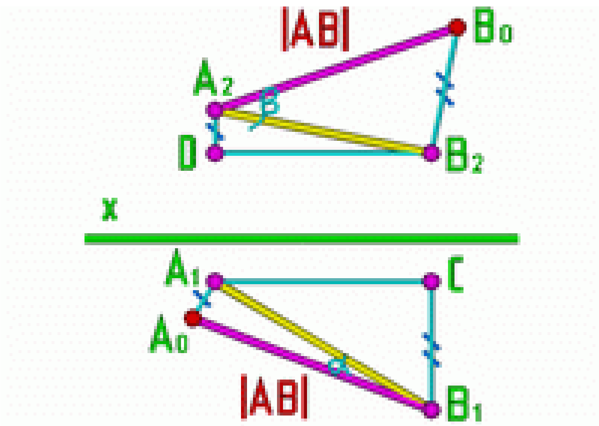


Рис.7

Для определения угла наклона прямой к горизонтальной плоскости (угла α), построения выполняют на базе горизонтальной проекции.

Для определения угла наклона прямой к фронтальной плоскости (угла β), построения выполняют на базе фронтальной проекции.

5. Прямые общего и частного положения.

Прямые частного положения - это прямые, параллельные одной или двум плоскостям проекций.

В первом случае прямые называются прямыми уровня.

Во втором случае - проецирующими прямыми, т.к. перпендикулярны какой-нибудь плоскости проекций.

Прямые уровня.

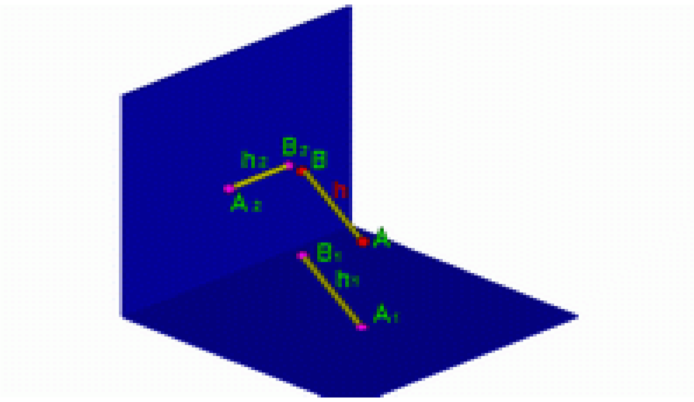


Рис.8

Горизонталь - h, прямая параллельная плоскости H
Фронталь - f, прямая параллельная плоскости V
Профильная прямая - p, прямая параллельная плоскости W

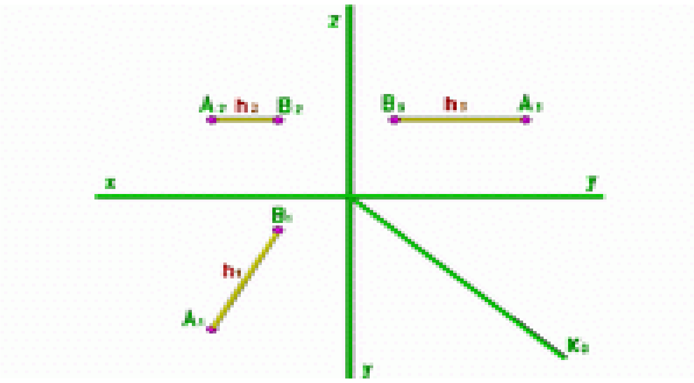


Рис.9

$h \parallel H$
$h_2 \parallel x$; $h_3 \parallel y$
$[AB] \in h$
$|A_1B_1| = |AB|$

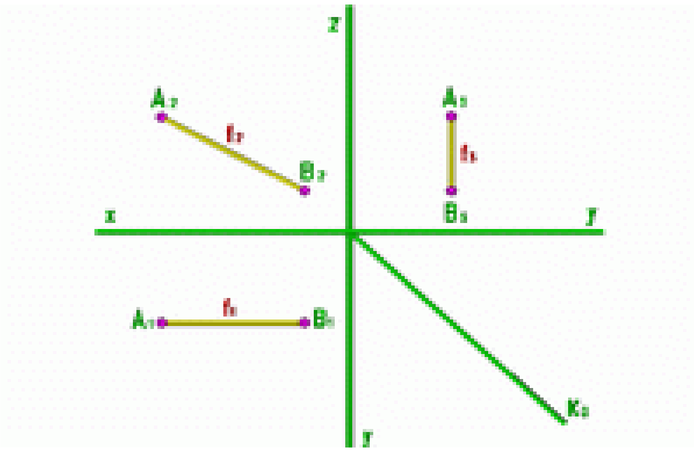


Рис.10

$f \parallel V$
$f_1 \parallel x$; $f_3 \parallel z$
$[AB] \in f$
$|A_2B_2| = |AB|$

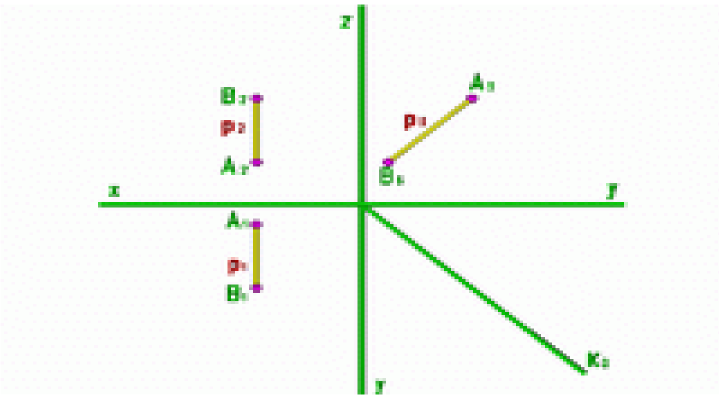
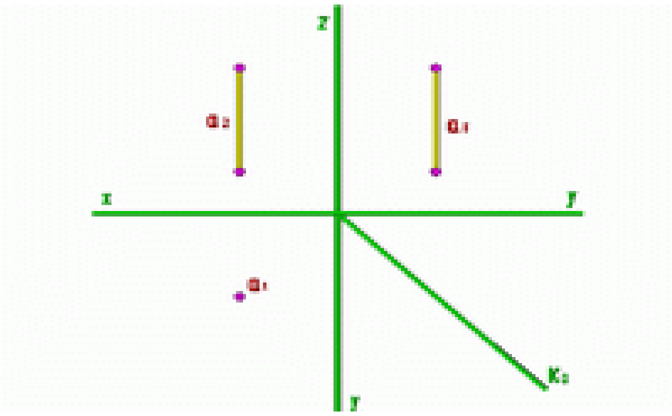


Рис.11

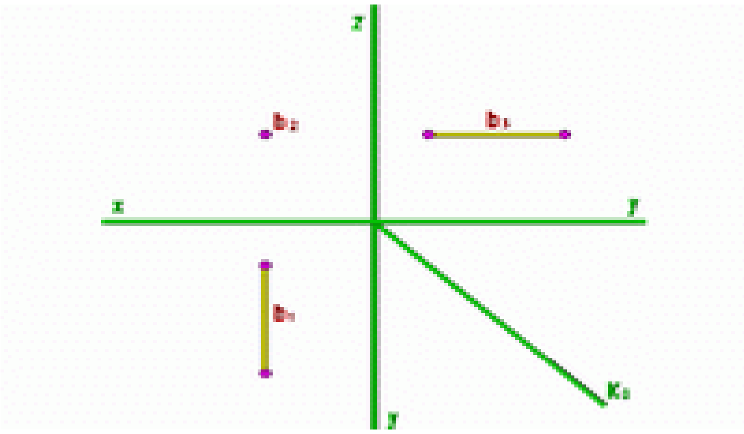
$p \parallel W$
$p_1 \parallel y$; $p_2 \parallel z$
$[AB] \in p$
$|A_3B_3| = |AB|$

Проецирующие прямые



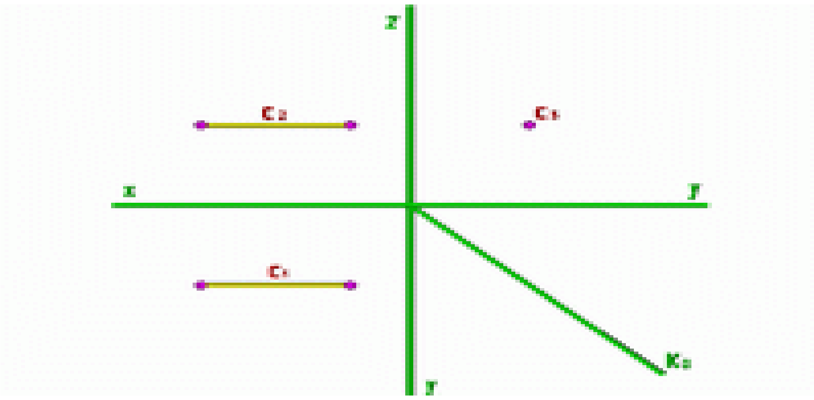
Горизонтально проецирующие прямые
$a \parallel V$; $a \parallel W$; $a \perp H$;
$a_2 \parallel z$; $a_3 \parallel z$; a_1 - точка.

Рис.12



Фронтально проецирующие прямые
$b \parallel H$; $b \parallel W$; $b \perp V$;
$b_1 \parallel y$; $b_3 \parallel y$; b_2 - точка.

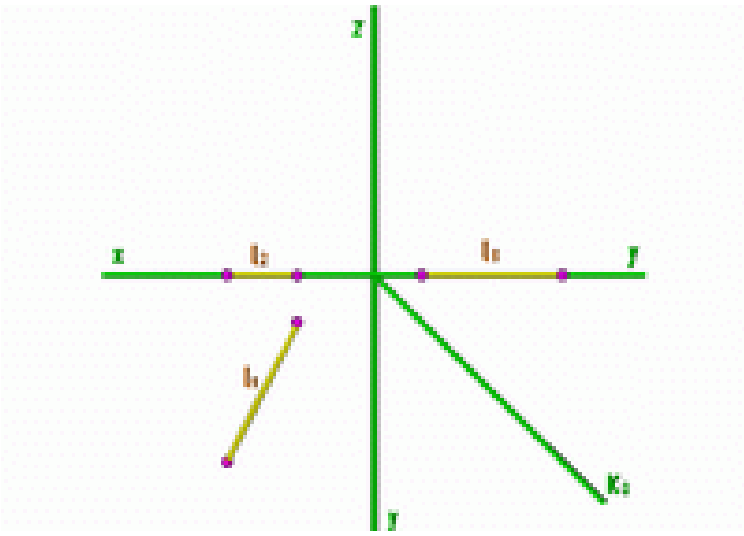
Рис.13



Профильно проецирующие прямые
$c \parallel H$; $c \parallel V$; $c \perp W$;
$c_1 \parallel x$; $c_2 \parallel x$; c_3 - точка.

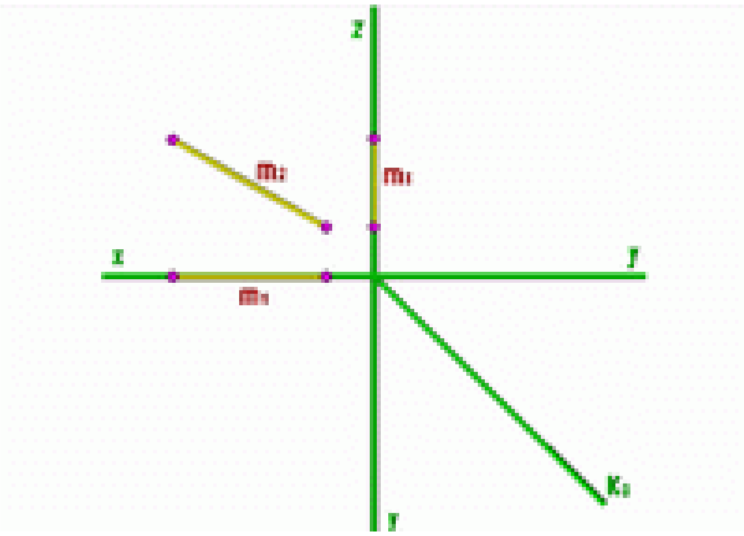
Рис.14

Прямые, принадлежащие плоскости проекции.



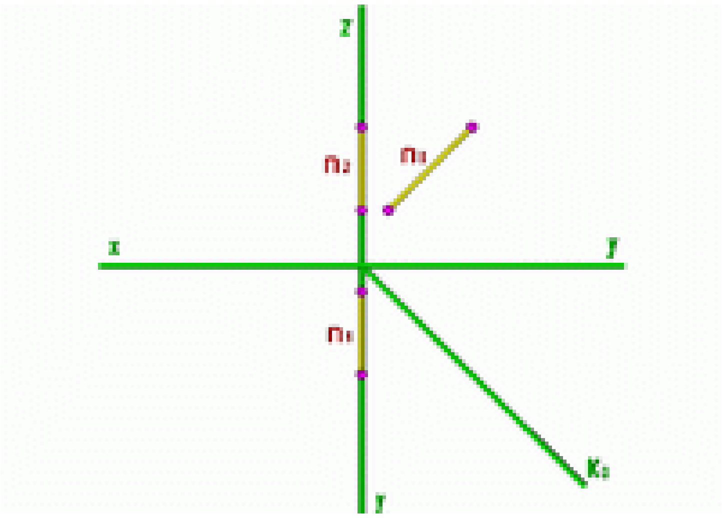
l∈H

Рис.15



m∈V

Рис.16



n∈W

Рис.17

---

6. Взаимное положение двух прямых.
7. Проецирование прямого угла.

Лекции: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

III ПЛОСКОСТЬ

1. Плоскость, её задание на чертеже.
2. Положение плоскости относительно плоскостей проекций.

---

6. Взаимное положение двух прямых.

Прямые в пространстве могут пересекаться и скрещиваться. При этом пересечение может быть в несобственной точке. В этом случае прямые называют параллельными.

Параллельные прямые.

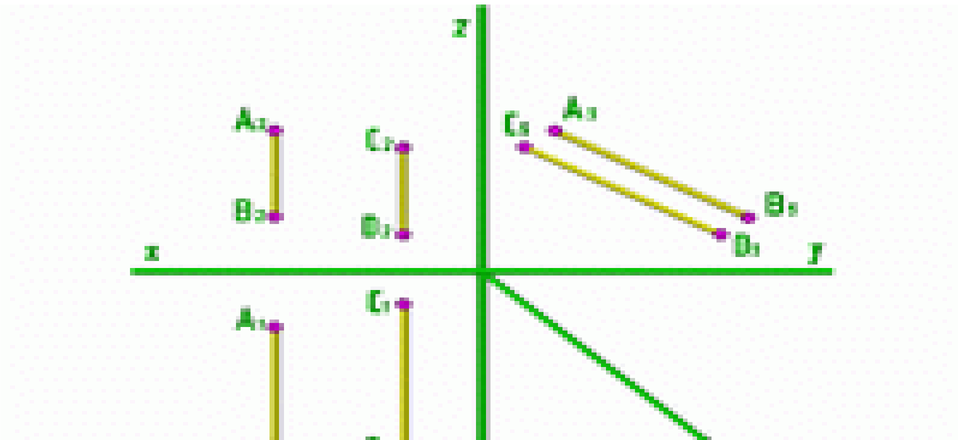
Из 4-го инвариантного свойства параллельного проецирования следует что:

$(\forall a,b)(a \parallel b) \Rightarrow [(a_1 \parallel b_1) \wedge (a_2 \parallel b_2) \wedge (a_3 \parallel b_3)]$ (1)

Для определения, параллельны ли прямые общего положения, достаточно определить параллельность из двух проекций:

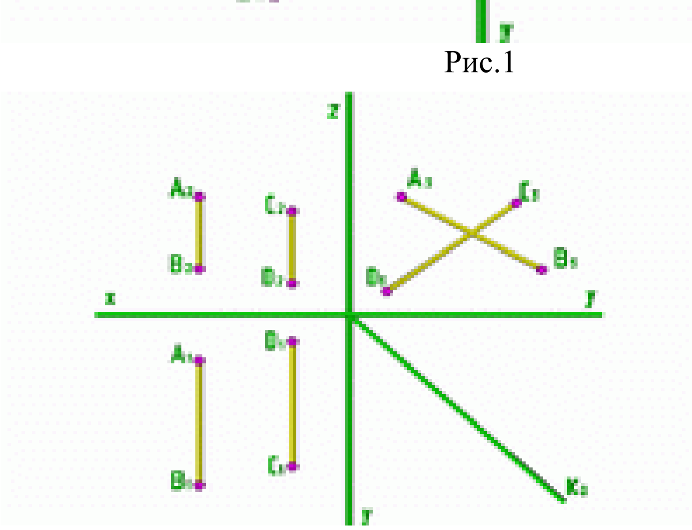
$[(a_1 \parallel b_1) \wedge (a_2 \parallel b_2)] \Rightarrow (a_3 \parallel b_3)$ (2)

Если прямые параллельны какой либо плоскости проекций, то условие (2) может не выполняться. В этом случае левая часть (2) является только необходимым, но недостаточным условием. Вопрос о параллельности решается на плоскости, которой прямые параллельны.



Прямые параллельны.

Рис.1



Прямые не параллельны.

Рис.2

Пересекающиеся прямые.

Из 3-го инвариантного свойства параллельного проецирования следует что:

$(l \cap m = A) \Rightarrow (l_1 \cap m_1 = A_1) \wedge (l_2 \cap m_2 = A_2) \wedge (l_3 \cap m_3 = A_3)$ (3)

Если прямые пересекаются в пространстве, то их одноимённые проекции пересекаются, причём точка пересечения проекций лежит на одной линии связи.

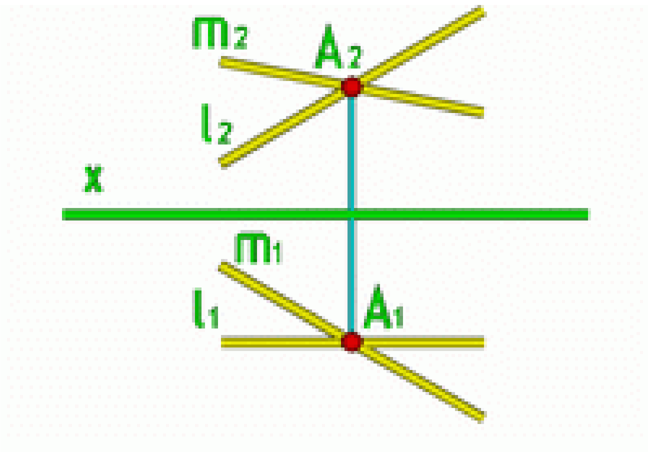


Рис.3

Если одна из прямых профильная, то вопрос о пересечении прямых решается на профильной плоскости проекций, причём прямые пересекаются, если точки пересечения фронтальной и профильной проекций лежат на одной линии связи.

Скрещивающиеся прямые.

Если условия (1) и (3) не выполняются, то прямые скрещиваются. Или, если прямые скрещиваются в пространстве, то их одноимённые проекции пересекаются, но точки пересечения проекций лежат не на одной лини связи

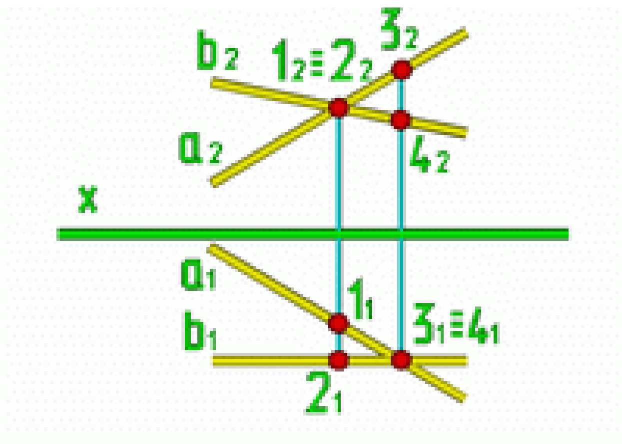
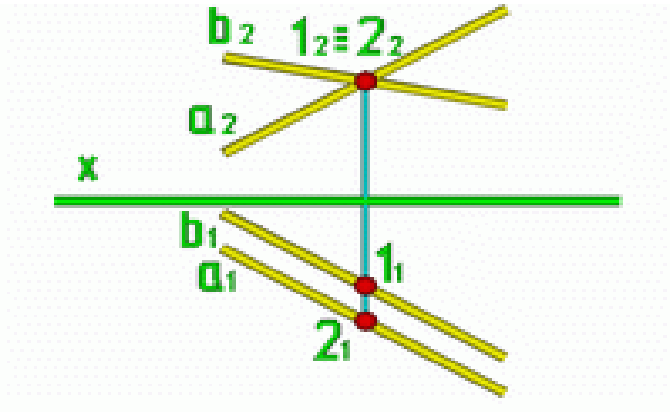


Рис.4

Точки 1 и 2 принадлежат 2-м разным прямым, удалённым от плоскости V на разные расстояния, аналогично точки 3 и 4 удалены от плоскости H на разные расстояния.

$a \dot{-} b$



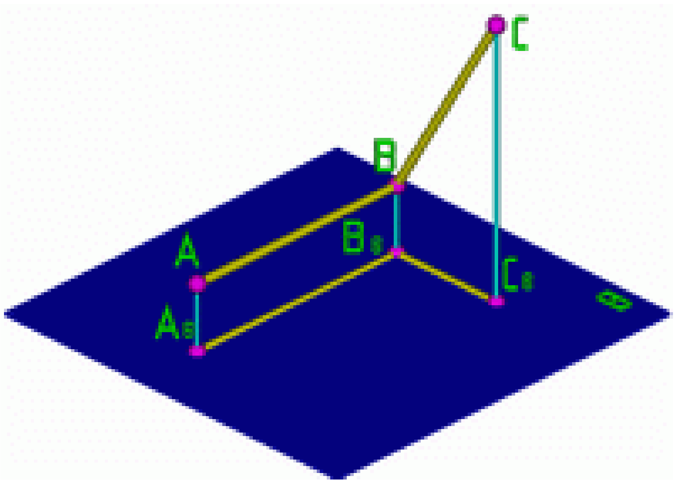
a∸b

Рис.5

7. Проецирование прямого угла.

Теорема: Для того, чтобы прямой угол проецировался ортогонально без искажения, необходимо и достаточно, чтобы, по крайней мере, одна его сторона была параллельна плоскости проекций, а вторая сторона не перпендикулярна этой плоскости.

$([AB]\perp[BC])\wedge([AB]\parallel\Theta,[BC]\not\perp\Theta)\Rightarrow[A^{\Theta} B^{\Theta}]\perp[B^{\Theta} C^{\Theta}]$



Дано:
$\angle ABC=90^{\circ}$
$[AB]\parallel\Theta$
Доказать:
$\angle A^{\Theta} B^{\Theta} C^{\Theta}=90^{\circ}$

Рис.6

Спроецируем [AB] и [BC] на плоскость Θ.
$[AB]\rightarrow[A^{\Theta} B^{\Theta}]$
$[BC]\rightarrow[B^{\Theta} C^{\Theta}]$

Фигура $ABB^{\Theta} A^{\Theta}$ - прямоугольник, следовательно $[AB]\perp$ плоскости $BCC^{\Theta} B^{\Theta}$, так как он перпендикулярен двум пересекающимся прямым этой плоскости ($AB\perp BC$ по условию и $AB\perp BB^{\Theta}$ по построению).
Но $AB\parallel A^{\Theta} B^{\Theta}$, следовательно $A^{\Theta} B^{\Theta}$ $A^{\Theta} B\perp$ плоскости $BCC^{\Theta} B^{\Theta}$, поэтому $A^{\Theta} B^{\Theta}\perp B^{\Theta} C^{\Theta}$,
т.е. $\angle A^{\Theta} B^{\Theta} C^{\Theta}=90^{\circ}$.

Обратное утверждение также верно.

По Гордону:

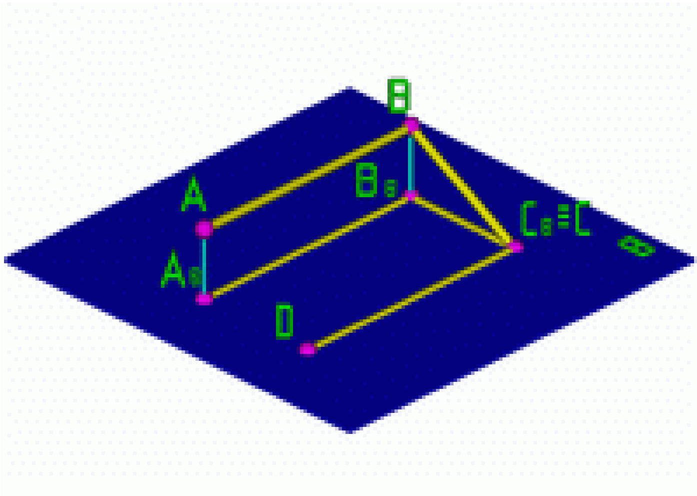


Рис.7

Дано:
$\angle ABC = 90^\circ$
$[AB] \parallel \Theta$
Доказать:
$\angle A^\Theta B^\Theta C^\Theta = 90^\circ$

Пусть $[BC] \cap \Theta = C$
Спроецируем [AB] и [BC] на плоскость Θ.
$[AB] \rightarrow [A^\Theta B^\Theta]$
$[BC] \rightarrow [B^\Theta C^\Theta]$

Проведём $[DC] \parallel [A^\Theta B^\Theta] \Rightarrow [DC] \parallel [AB]$, поэтому $\angle BCD = 90^\circ$
На основании теоремы о 3-х перпендикулярах: $(\angle B^\Theta CD = 90^\circ) \wedge (\angle BCD = 90^\circ) \Rightarrow \angle A^\Theta B^\Theta C = 90^\circ$.

Верно также обратное утверждение. Эту теорему применяют при решении задач на определение расстояния от точки до прямой частного положения.

Пример:

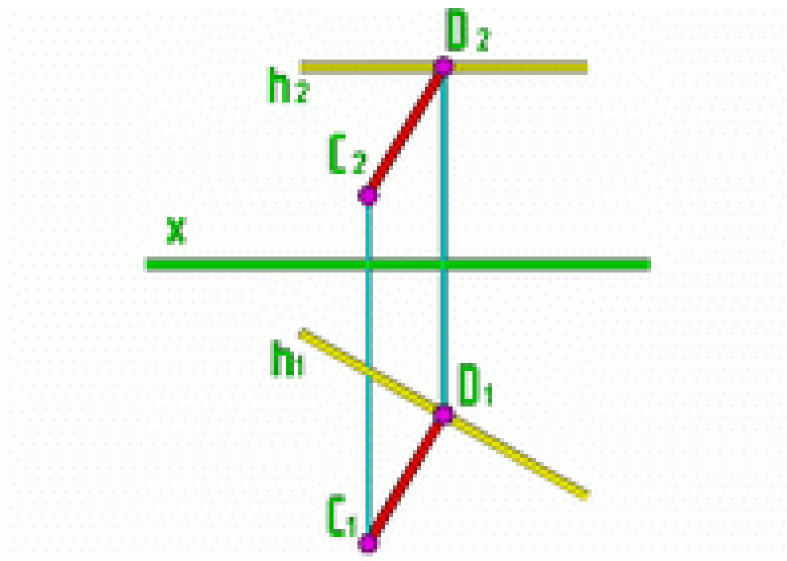


Рис.8

Дана горизонталь h и точка C. Надо опустить перпендикуляр из точки C на прямую h.
Перпендикуляр из точки C к прямой h образует угол 90° и $h \parallel H$, следовательно прямой угол без искажения проецируется на плоскость H, поэтому из горизонтальной проекции точки C надо опустить перпендикуляр к h_1 (горизонтальной проекции горизонтали).
$|C_1D_1| = |CD|$

III ПЛОСКОСТЬ

Плоскость - простейшая поверхность (1-го порядка).

1. Плоскость, её задание на чертеже.

Положение плоскости в пространстве может быть задано:

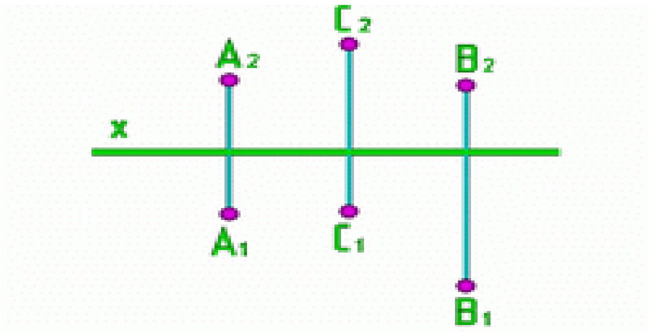
1. Тремя точками, не лежащими на одной прямой.
2. Прямой и точкой вне прямой.
3. Двумя прямыми, пересекающимися в несобственной точке (пересекающимися или параллельными).

Соответственно и на чертеже (эпюре) плоскость может быть задана аналогично.

Задание плоскости на чертеже производится проекциями этих же геометрических элементов. Кроме того, плоскость может быть задана также проекциями отсека плоской фигуры (Ф).

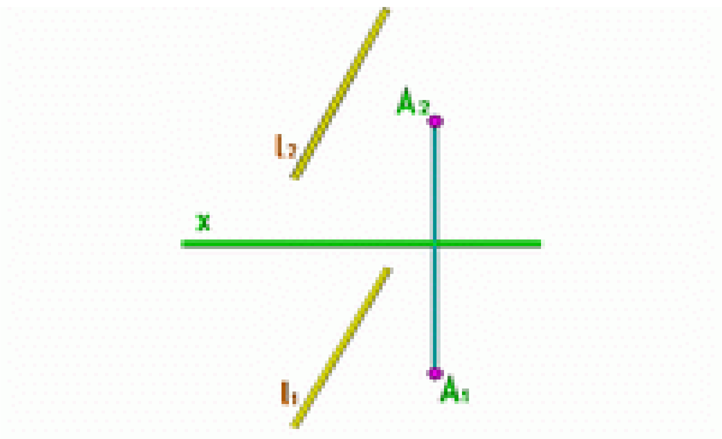
Иногда целесообразно задать плоскость не произвольными пересекающимися прямыми, а прямыми, по которым эта плоскость пересекает плоскости проекций. Эти прямые называют следами плоскости, а такой вариант задания плоскости называют методом задания плоскости следами.

Примеры задания плоскости:



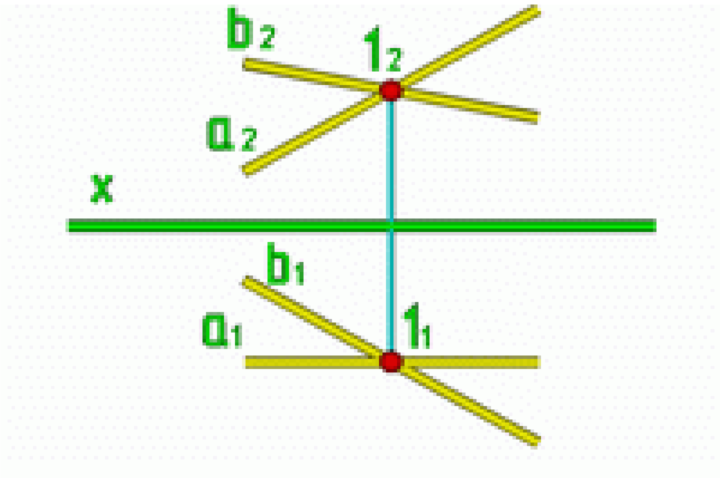
Тремя точками

Рис.9



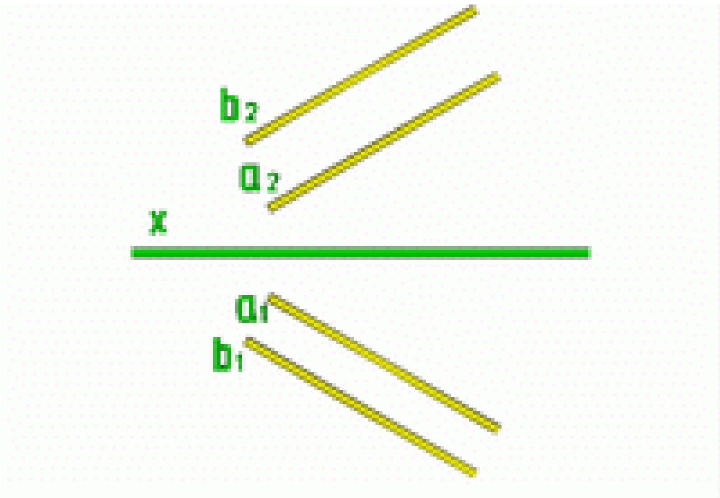
Точкой и прямой

Рис.10



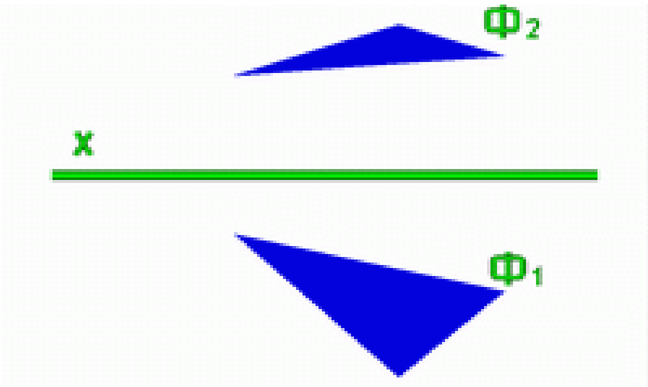
Пересекающимися прямыми

Рис.11



Параллельными прямыми

Рис.12



Отсеком плоскости

Рис.13

2. Положение плоскости относительно плоскостей проекций.

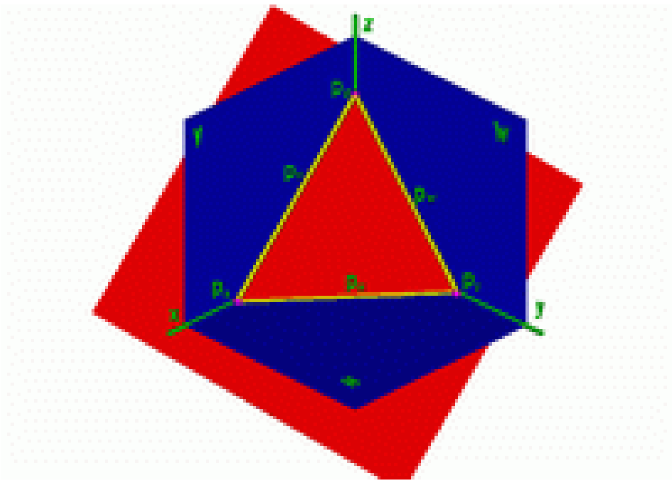


Рис.14

Плоскость Θ занимает произвольное положение относительно плоскостей проекций и, следовательно, пересекает все 3 плоскости проекций. Соответствующие следы плоскости Θ обозначают:

$P_H = \Theta \cap H$ - горизонтальный след плоскости Θ.

$P_V = \Theta \cap V$ - фронтальный след плоскости Θ.

$P_W = \Theta \cap W$ - профильный след плоскости Θ.

Точки:

$P_x = \Theta \cap x = P_H \cap P_V$

$P_y = \Theta \cap y = P_H \cap P_W$

$P_z = \Theta \cap z = P_V \cap P_W$,

в которых пересекаются два следа, называют точками схода следов.

Плоскость, у которой углы наклона к плоскостям проекций произвольны (не равны 0° или 90°), называют плоскостью общего положения.

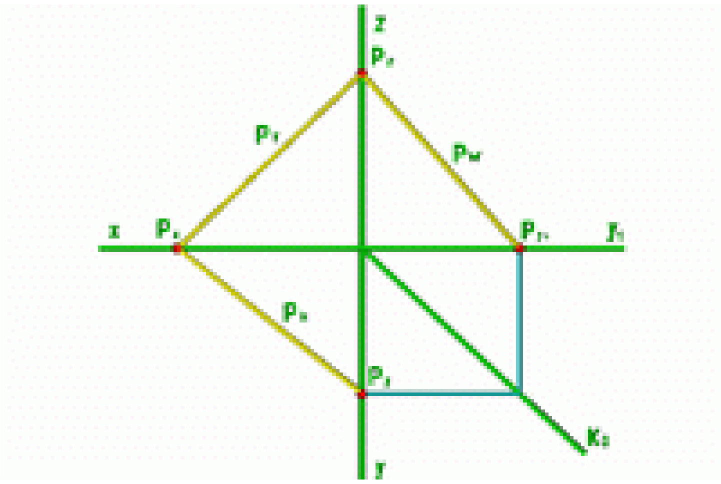


Рис.15

Чтобы построить профильный след плоскости надо найти точки P_x, P_y и P_z, затем построить P_{y1} и соединить её с точкой P_z.

Частные случаи расположения плоскостей.

Кроме рассмотренного общего случая плоскость, по отношению к плоскостям проекций, может занимать следующие частные положения:

Плоскости, перпендикулярные к плоскостям проекции называют проецирующими.

Проецирующие плоскости различают:

Горизонтально-проецирующая плоскость, P⊥H

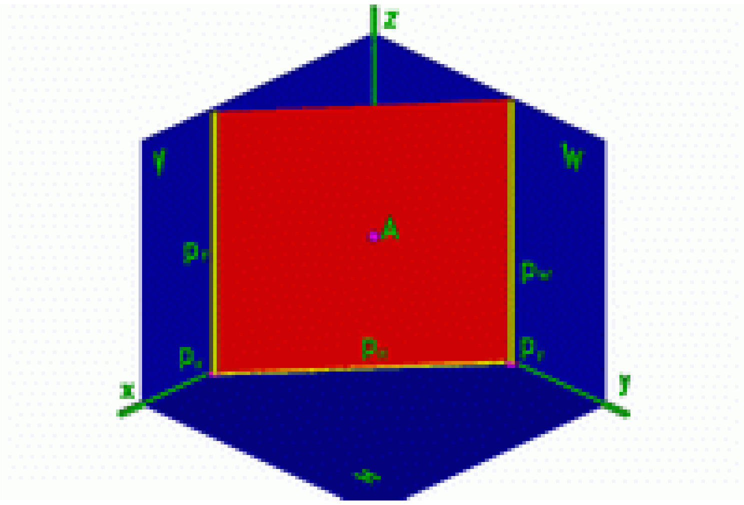


Рис.16

Свойства горизонтально-проецирующей плоскости:

1. Фронтальный след (P_V) перпендикулярен оси x. $P_V \perp x$. $P(P_H) \perp H$.
2. Угол β- является линейным углом двугранного угла между плоскостями V и P. $\beta = |\beta| = |\angle PV|$.

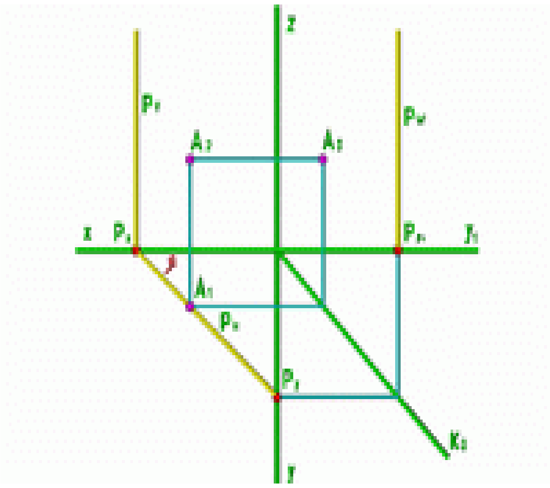


Рис.17

3. Горизонтальные проекции точек, прямых, плоских фигур, лежащих в горизонтально-проецирующей плоскости, лежат на горизонтальном следе этой плоскости. $A \in P \Rightarrow A_1 \in P_H$.

Фронтально-проецирующая плоскость, P⊥V

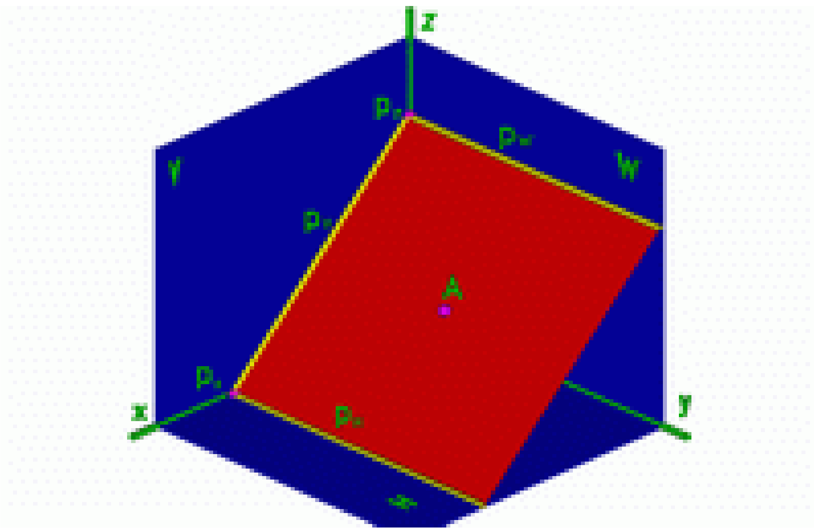


Рис.18

Свойства фронтально-проецирующей плоскости:

1. Горизонтальный след (P_H) перпендикулярен оси x. $P_H \perp x$. $P(P_V) \perp V$.
2. Угол α- угол наклона плоскости P к плоскости проекций H. $\alpha = |\alpha| = |\angle PH|$.

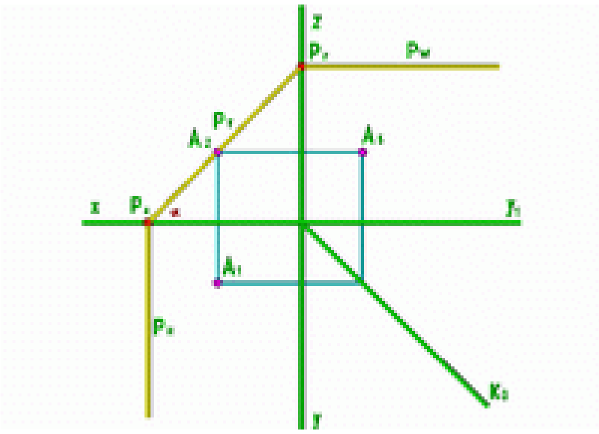


Рис.19

3. Фронтальные проекции точек, прямых, плоских фигур, лежащих в фронтально-проецирующей плоскости, лежат на фронтальном следе этой плоскости. $A \in P \Rightarrow A_2 \in P_V$.

Профильно-проецирующая плоскость, $P \perp W$

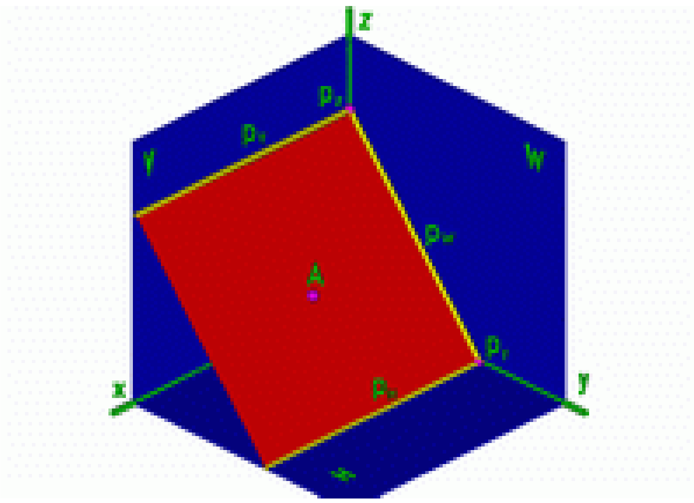


Рис.20

Свойства профильно-проецирующей плоскости:
1. $P_V \perp z$. $P_H \perp y$. $P(P_W) \perp W$.
2. Угол α - угол наклона плоскости P к плоскости проекций H. $\alpha = |\alpha| = |\angle TH|$.
Угол β - угол наклона плоскости P к плоскости проекций V. $\beta = |\beta| = |\angle TV|$.

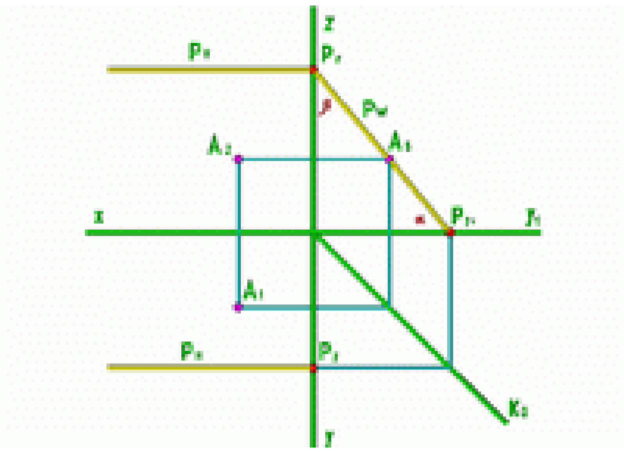


Рис.21

3. Профильные проекции точек, прямых, плоских фигур, лежащих в профильно-проецирующей плоскости, лежат на профильном следе этой плоскости. $A \in P \Rightarrow A_3 \in P_W$.

Плоскости, перпендикулярные к двум плоскостям проекций называют плоскостями уровня.

а). Плоскость, параллельная горизонтальной плоскости проекций называется горизонтальной плоскостью.
b). Плоскость, параллельная фронтальной плоскости проекций называется фронтальной плоскостью.
c). Плоскость, параллельная профильной плоскости проекций называется профильной плоскостью.

Проецирующие плоскости, проходящие через биссектрисы углов, образованных осями координат, называют биссекторными плоскостями.

Свойство биссекторной плоскости 2-го и 4-го октантов:
Горизонтальная и фронтальная проекции любых геометрических фигур, принадлежащих этой плоскости, совпадают (так как любая точка этой плоскости удалена на одинаковые расстояния от горизонтальной и фронтальной плоскостей проекций).

---

3. Прямая и точка в плоскости. Прямые уровня плоскости.

Позиционными задачами называются задачи, в результате решения которых можно ответить на вопрос о взаимном расположении заданных геометрических фигур. Они бывают двух видов:

1. Задачи на пересечение (а) построение линий пересечения двух поверхностей, б) определение точек пересечения линии с поверхностью
2. Задачи на взаимную принадлежность геометрических элементов (например, на принадлежность точки поверхности).

Прямая и точка в плоскости.

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости.

Из элементарной геометрии известно, что прямая принадлежит плоскости, если:

1. она проходит через две точки, принадлежащие плоскости;
2. она проходит через 1 точку, принадлежащую плоскости, и параллельна прямой, лежащей в плоскости.

Из первого положения следует, что если прямая принадлежит плоскости, то ее одноименные следы лежат на одноименных следах плоскости.

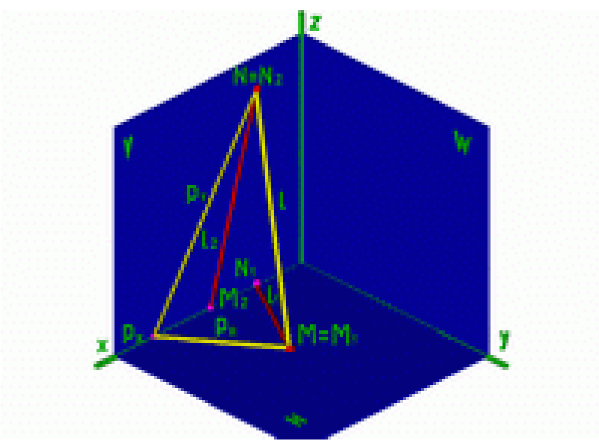
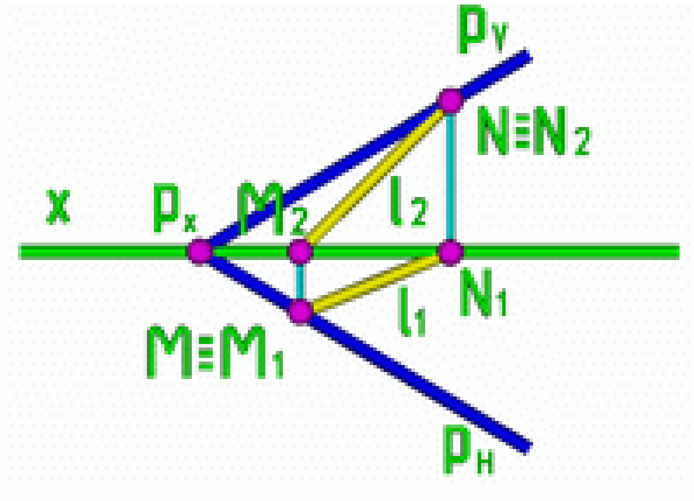


Рис.1



Пусть следами задана плоскость общего положения P, построим в этой плоскости прямую l.

Рис.2

Главные линии плоскости.

Прямые, принадлежащие заданной плоскости и плоскости уровня, называются линиями уровня.

Прямые, принадлежащие плоскости и перпендикулярные к линиям уровня, называются линиями наибольшего наклона плоскости к плоскости проекций. Иногда линию наибольшего наклона плоскости к плоскости H называют линией наибольшего ската.

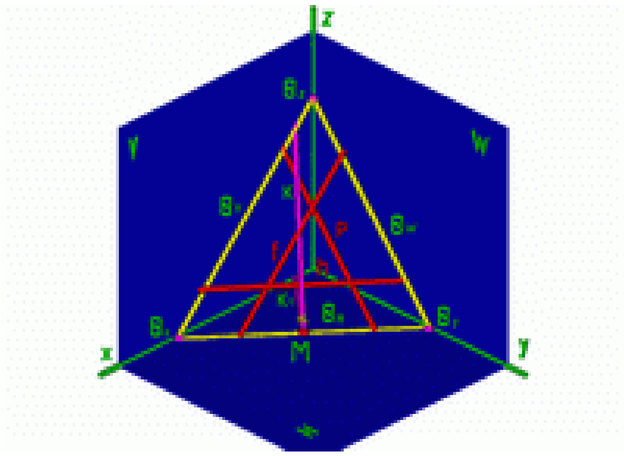
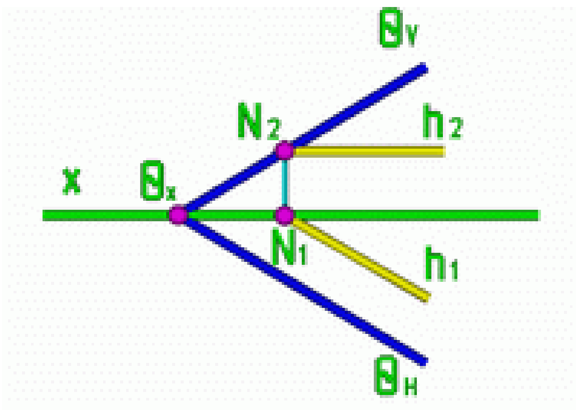


Рис.3

Линии уровня.

Бывают трех видов:

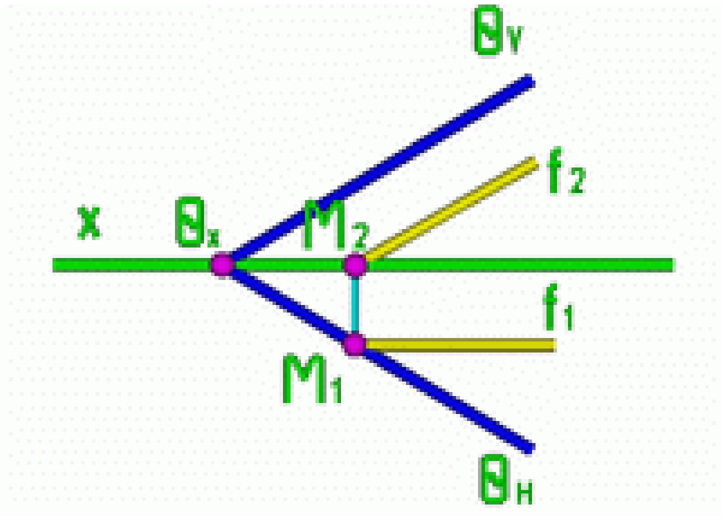
1. Горизонталь плоскости Θ



$(h \subset \Theta) \wedge (h \parallel H)$
$h_2 \parallel X$
$h_1 \parallel \Theta_H$

Рис.4

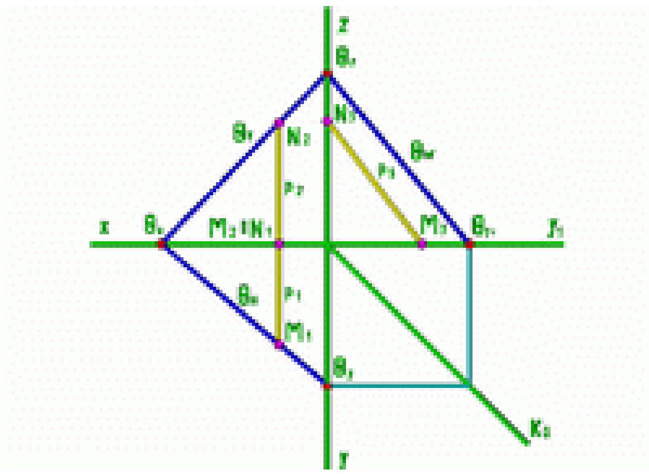
2. Фронталь плоскости Θ



$(f \subset \Theta) \wedge (f \parallel V)$
$f_1 \parallel X$
$f_2 \parallel \Theta_V$

Рис.5

3. Профильная прямая плоскости Θ



$(p \subset \Theta) \wedge (p \parallel W)$
$(p_1 \wedge p_2) \perp X$
$p_3 \parallel \Theta_W$

Рис.6

Пример: Построить линию наибольшего ската плоскости и определить угол наклона плоскости Θк плоскости проекций Н.

У линии наибольшего ската на эпюре горизонтальная проекция всегда перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали или горизонтальному следу.

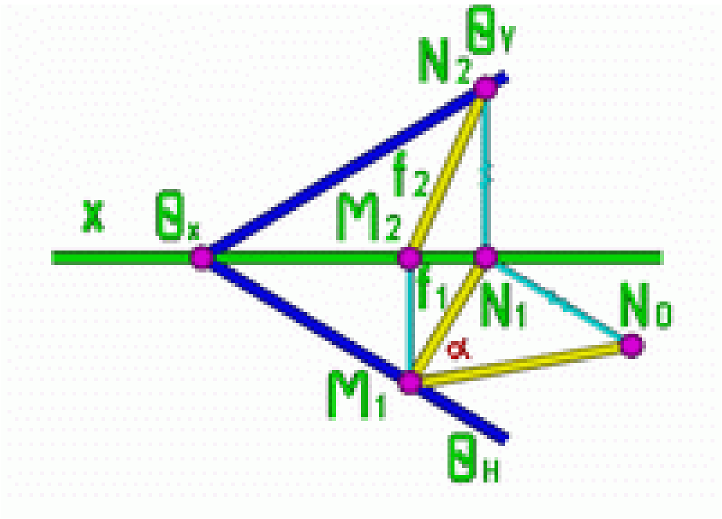


Рис.7

Пример: Найти недостающую проекцию точки A, лежащей в плоскости Θ

Так как $A \in \Theta \Leftrightarrow A \in l \subset \Theta$

В качестве прямой l следует брать линию уровня плоскости, так как построение ее ортогональных проекций проще, чем построение проекций любой другой прямой, принадлежащей плоскости.

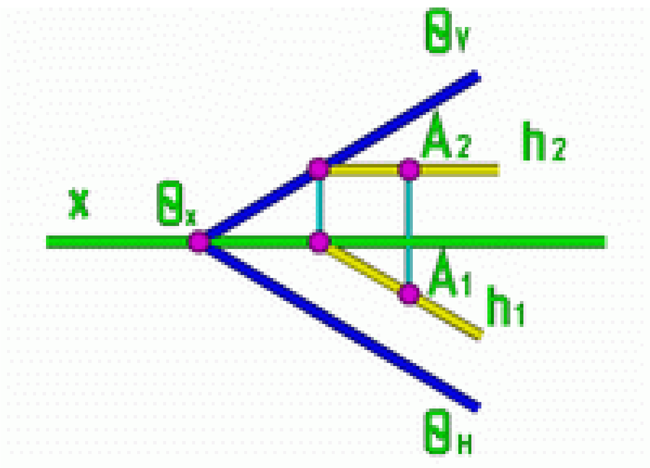


Рис.8

Взаимное положение плоскостей.

Две плоскости в пространстве могут пересекаться по собственной и несобственной прямой, следовательно они могут пересекаться или быть параллельными.

4. Параллельность плоскостей.

Из элементарной геометрии известна теорема (признак параллельности плоскостей):

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

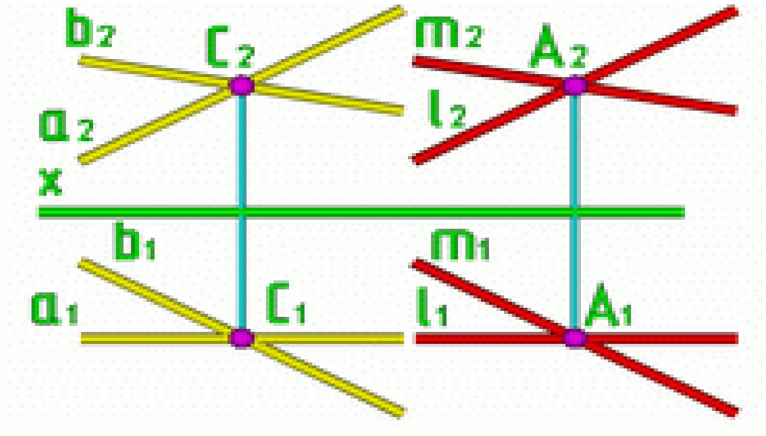
Следствие: если плоскости заданы следами и одноименные следы плоскостей параллельны, то и плоскости параллельны.

$(Q_H \| P_H) \wedge (Q_V \| P_V) \wedge (Q_W \| P_W) \Leftrightarrow Q \| P$

Из этого соотношения следует, что если хотя бы одна пара одноименных следов пересекается, то и плоскости пересекаются.

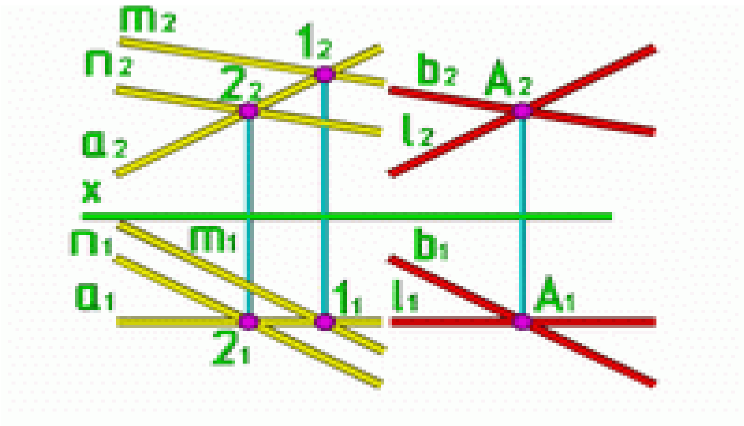
Из этих определений легко вывести способ построения параллельных плоскостей на чертеже.

Пример: Через точку А провести плоскость, параллельно заданной.



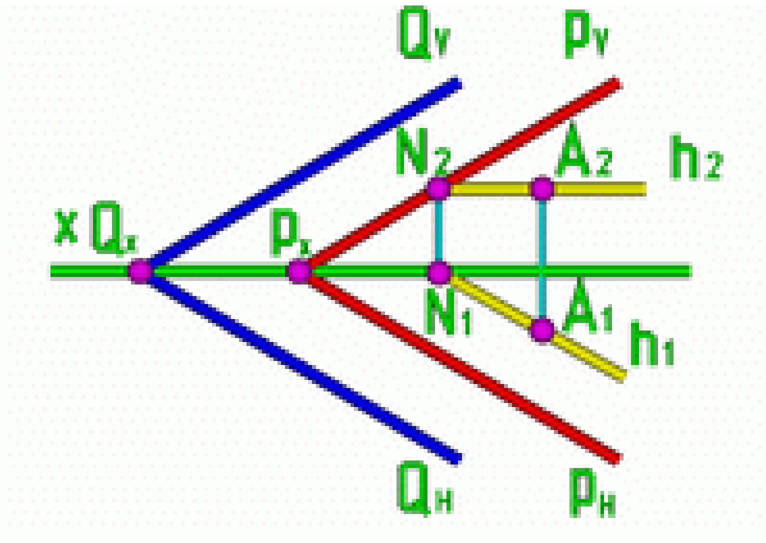
$l_2 \parallel a_2$
$l_1 \parallel a_1$
$m_2 \parallel b_2$
$m_1 \parallel b_1$

Рис.9



$b_2 \parallel m_2$
$b_1 \parallel m_1$
$l_2 \parallel a_2$
$l_1 \parallel a_1$

Рис.10



$h_2 \parallel X$
$h_1 \parallel Q_H$
$Q_H \parallel P_H$

Рис.11

$h_1 \parallel Q_H$, так как $Q_H \parallel P_H$ (и вообще $P \parallel Q$ по условию).

Для плоскостей общего положения $(Q_H \parallel P_H) \wedge (Q_V \parallel P_V) \Rightarrow (Q_W \parallel P_W)$

Условие параллельности Q_W и P_W проверяется построением.

5. Пересечение плоскостей.

Две плоскости пересекаются по прямой линии, следовательно для определения линии пересечения достаточно найти

а) две точки, принадлежащие одновременно каждой из двух заданных плоскостей;

б) одну точку, если известно направление линии пересечения.

Пересечение плоскостей, заданных следами.

В частном случае, когда плоскости заданы следами и следы пересекаются в поле чертежа, определяют точки пересечения одноименных следов плоскостей. Эти точки общие для двух плоскостей. Они же являются следами линии пересечения заданных плоскостей.

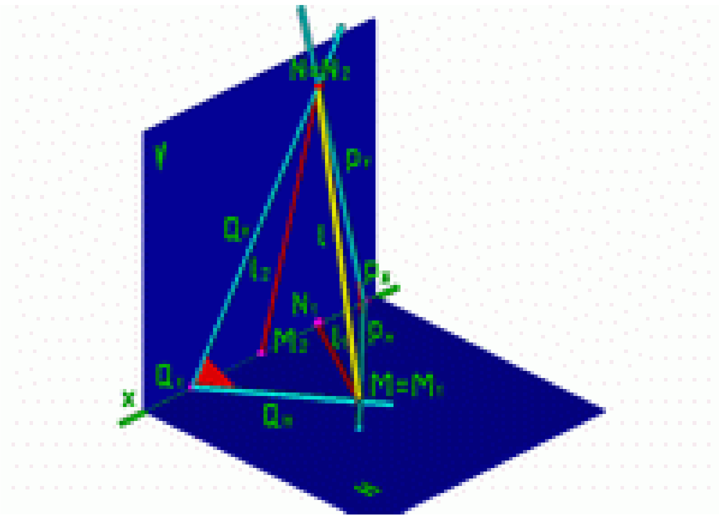


Рис.12

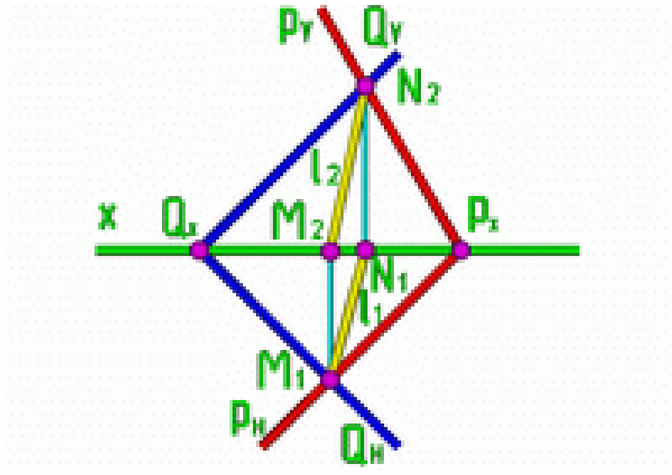


Рис.13

Правило нахождения линии пересечения на эпюре двух плоскостей, заданных следами.

1. Строим точки пересечения одноименных следов.
   $N_2=Q_V \cap P_V=l \cap V$; $M_1=Q_H \cap P_H=l \cap H$
2. Строим фронтальную проекцию (M_2) горизонтального следа (M_1) и горизонтальную проекцию (N_1) фронтального следа (N_2).
3. Строим проекции линии пересечения (l_1 и l_2), соединяя одноименные проекции её следов.

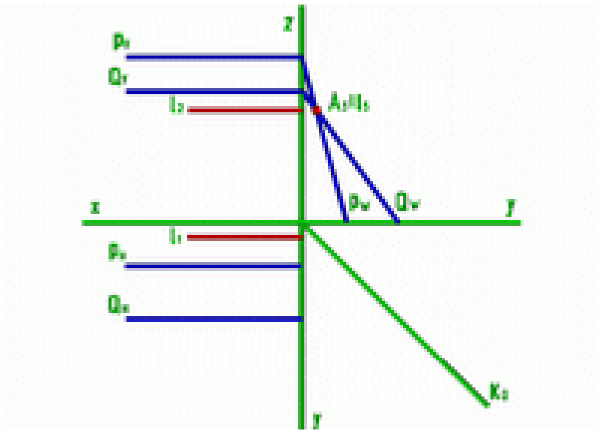


Рис.14

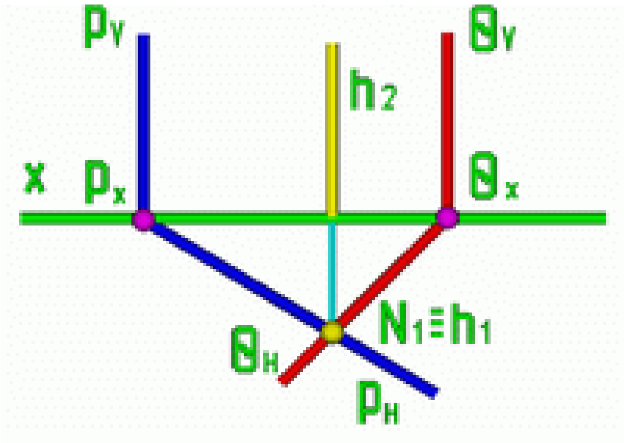


Рис.15

Если две пересекающиеся плоскости являются проецирующими относительно одной плоскости проекций, то линия их пересечения - проецирующая прямая.

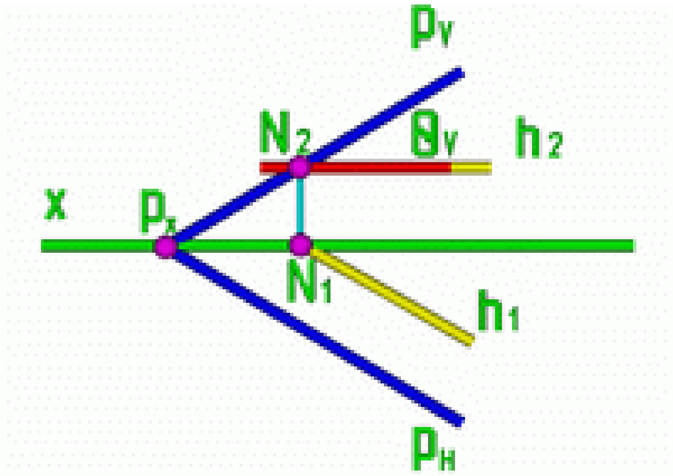


Рис.16

Если одна из пересекающихся плоскостей частного положения, то проекция линии пересечения совпадает с проекцией плоскости.

В более общих случаях:

а) когда плоскости заданы следами, но следы не пересекаются в пределах чертежа;

б) когда одна из плоскостей задана следами, а другая плоскость линиями;

в) когда обе плоскости заданы линиями или плоскими фигурами.

Для построения линии пересечения применяют способ дополнительных плоскостей-посредников.

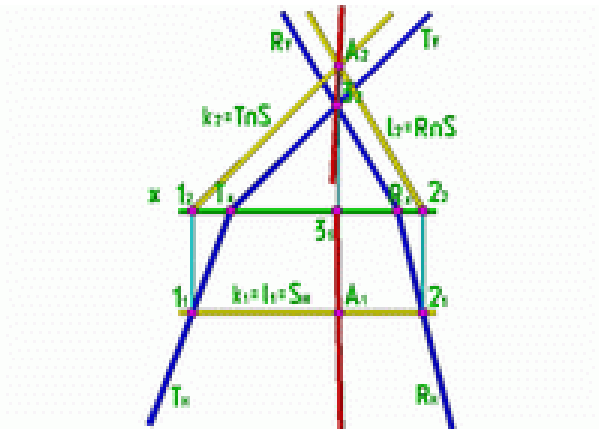


Рис.17

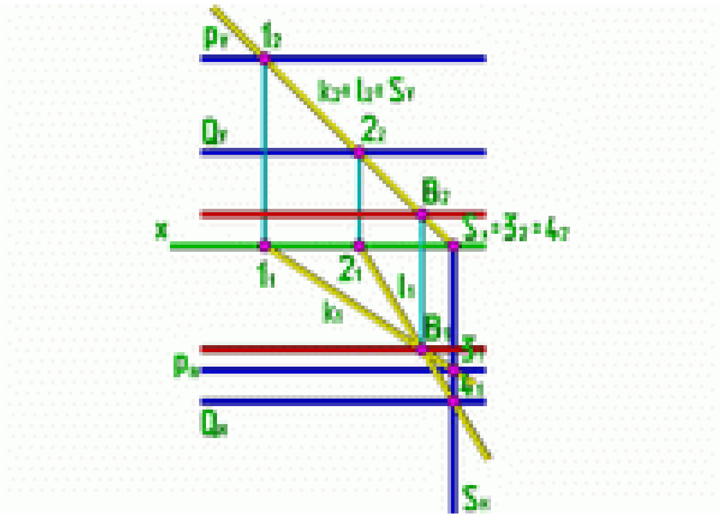


Рис.18

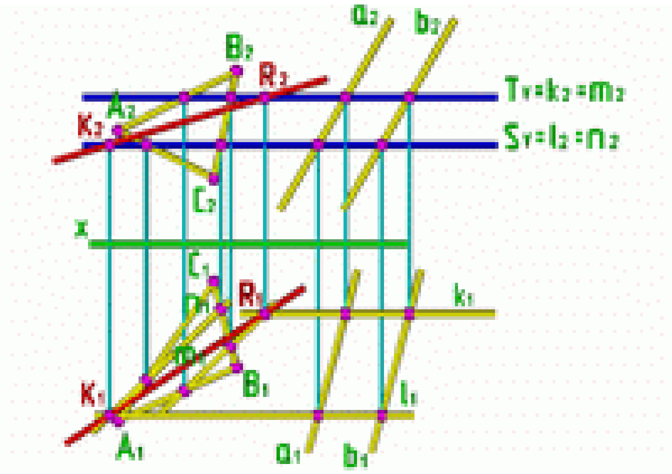


Рис.19

Итак, способ введения дополнительной плоскости-посредника состоит из:

1. введения вспомогательной секущей плоскости частного или общего положения, пересекающейся с двумя заданными плоскостями.
2. нахождения линии пересечения введенной плоскости с каждой из заданных.
3. нахождения общей точки, принадлежащей трем плоскостям. Эта точка будет принадлежать искомой линии пересечения.

4. соединения одноименных проекций точек - нахождение линии пересечения плоскостей.

Если одной плоскости-посредника недостаточно для решения задачи, то вводят еще столько плоскостей, сколько необходимо.

Способ дополнительных плоскостей-посредников широко распространен в начертательной геометрии.

В качестве плоскостей-посредников стараются выбирать плоскости частного положения.

---

6. Параллельность прямой и плоскости. Лекции: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13
7. Пересечение прямой с плоскостью.

Взаимное положение прямой и плоскости.

Прямая и плоскость в пространстве могут иметь одну собственную или несобственную общую точку или множество общих точек, следовательно, прямая может пересекаться с плоскостью, быть ей параллельна либо совпадать с плоскостью.

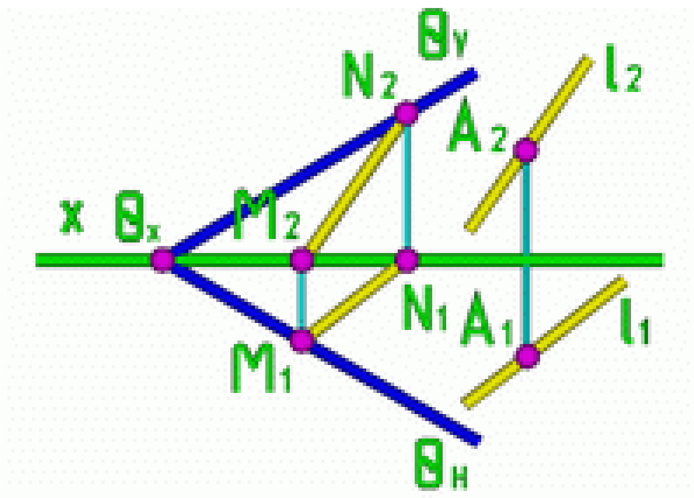
6. Параллельность прямой и плоскости.

Из элементарной геометрии известно, что прямая параллельна плоскости, если в плоскости можно провести прямую, параллельную заданной прямой.

$(m \parallel n) \wedge (n \in \Theta) \Rightarrow m \parallel \Theta$

Через точку, не принадлежащую плоскости, можно провести бесконечное количество прямых, параллельных плоскости. Для получения единственного решения нужно наложить дополнительное условие, например, построить прямую, параллельную сразу двум плоскостям.

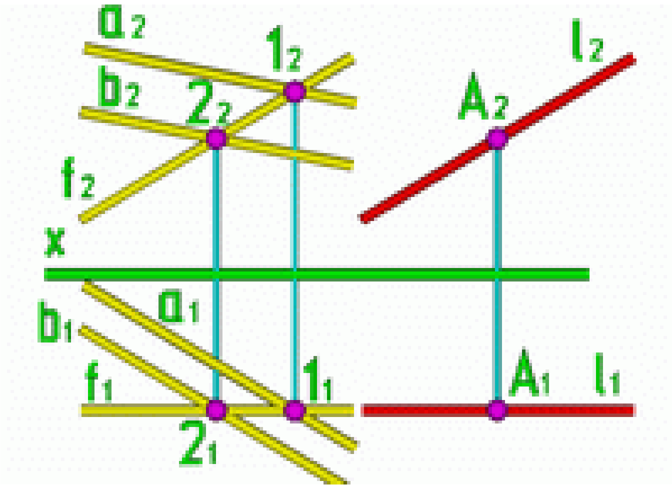
Пример 1: Через точку A провести прямую l, параллельную заданной плоскости Θ.



$l_2 \parallel N_2M_2$
$l_1 \parallel M_1N_1$

Рис.1

Пример 2: Через точку A провести прямую, параллельную заданной плоскости и плоскости проекций V.



$l_2 \parallel f_2$
$l_1 \parallel f_1$

Рис.2

7. Пересечение прямой с плоскостью.

Определение точки встречи прямой с плоскостью относится к элементарным задачам начертательной геометрии, но значение этой задачи большое, так как эта задача входит составной частью в решение многих других позиционных и метрических задач.

Метрические задачи - задачи, в которых определяют размеры геометрических элементов и расстояния между ними.

Определение видимости на эпюрах.

При пересечении прямой с плоскостью для улучшения наглядности чертежа для показа видимых линий применяют сплошные основные линии, для невидимых линий - штриховые. При показе видимости линий на эпюре предполагается, что:

1. Плоскости и поверхности непрозрачные.
2. Наблюдатель всегда находится в первой четверти или первой октанте.
3. Луч зрения от наблюдателя перпендикулярен к той или иной плоскости проекций (по отношению к которой определяется видимость).

Метод конкурирующих точек.

Точки, относящиеся к различным геометрическим объектам и лежащие на одном проецирующем луче, называются конкурирующими в видимости по отношению к той плоскости проекций, к которой проецирующий луч перпендикулярен.

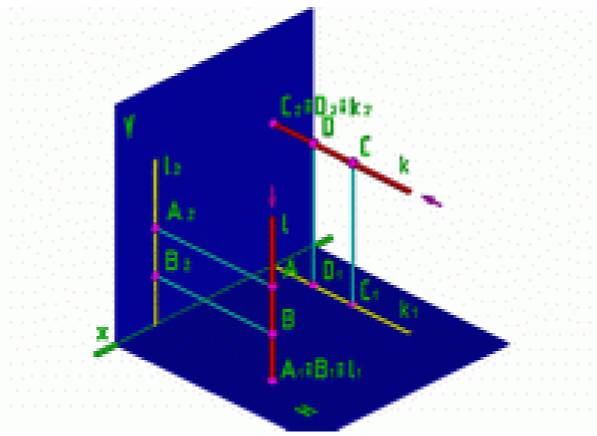


Рис.3

Если точка A и точка B лежат на одном проецирующем луче $l \perp H$, то есть $A \wedge B \in l \perp H$, то точки A и B называются конкурирующими в видимости по отношению к плоскости H. Причем точка A видимая. Она заслоняет точку B. Точка B невидимая.

Аналогично, $C \wedge D \in k \perp V$. C - видимая. D - невидимая.

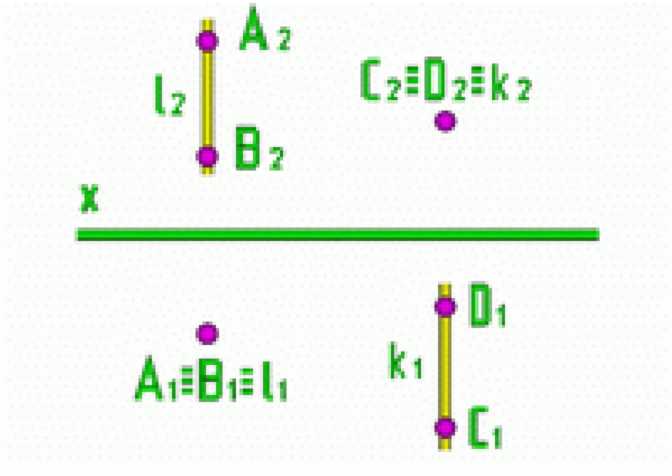


Рис.4

На эпюре из двух конкурирующих точек будет видима та проекция, которая дальше отстоит от плоскости проекций, по отношению к которой они конкурируют.

Рассмотрим общий случай: Плоскость и пересекающая ее прямая произвольно расположены в пространстве.

Для нахождения точки встречи прямой с плоскостью в этом случае нужно:

1. Через прямую m провести вспомогательную плоскость S; $m \in S$
2. Построить прямую пересечения l плоскостей Θ и S; $l = \Theta \cap S$.
3. Построить точку пересечения K - точку встречи, как результат пересечения прямых l и m. $K = l \cap m$.

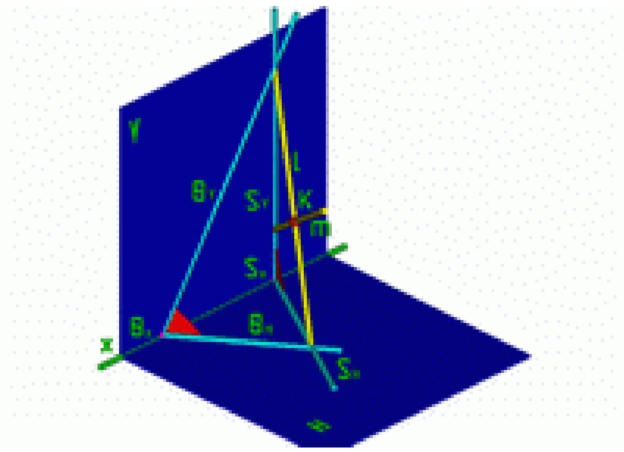
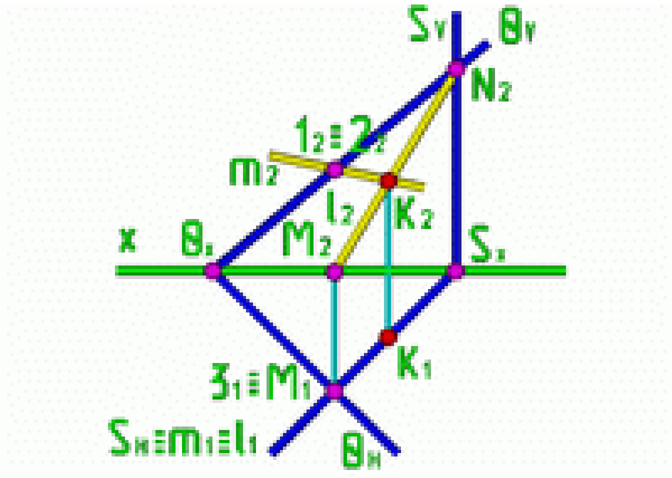


Рис.5

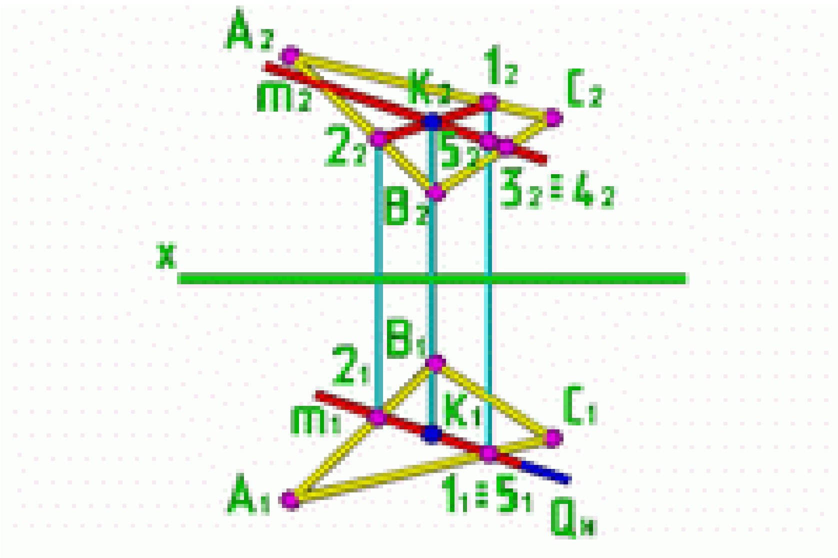


$1_2 \in \Theta_V$
$2_2 \in m_2$
$M_1 \in \Theta_H$
$3_1 \in m_1$

Рис.6

При определении видимости на плоскость H рассматриваем проекции конкурирующих точек на плоскость V, а при определении видимости на плоскость V рассматриваем проекции конкурирующих точек на плоскости H.

Пример. Определить точку встречи прямой m и плоскости P, заданной треугольником ABC.



$3_2 \in m_2$
$4_2 \in [B_2C_2]$
$1_1 \in [A_1C_1]$
$5_1 \in m_1$

Рис.7

Пересечение плоских фигур.

Для построения линии пересечения плоских фигур рекомендуется найти точки встречи двух сторон одной плоской фигуры с плоскостью другой фигуры.

Метрические задачи.

Метрические задачи - задачи, в которых определяют размеры геометрических элементов и расстояния между ними.

Построение взаимно перпендикулярных прямых и плоскостей, наряду с определением расстояния между двумя точками, являются основными графическими операциями при решении метрических задач.

---

8. Перпендикулярность прямой и плоскости. Лекции: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13
9. Перпендикулярность прямых общего положения.

10. Перпендикулярность плоскостей.

8. Перпендикулярность прямой и плоскости.

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна каждой из двух пересекающихся прямых, лежащих в плоскости.

Если в плоскости взять не произвольные пересекающиеся прямые, а ее горизонталь и фронталь, то появляется возможность воспользоваться теоремой о проецировании прямого угла:

Если в плоскости взять не произвольные пересекающиеся прямые, а ее горизонталь и фронталь, то появляется возможность воспользоваться теоремой о проецировании прямого угла:

"Если из двух взаимно перпендикулярных прямых одна прямая частного положения, то прямой угол между ними проецируется без искажения на ту плоскость проекций, которой параллельна прямая частного положения."

Дана плоскость P, заданная фронталью и горизонталью $P(h \cap f)$ и точка K на этой плоскости $K=f \cap h$. Нужно из точки K восстановить перпендикуляр к плоскости P ($n \perp P$).

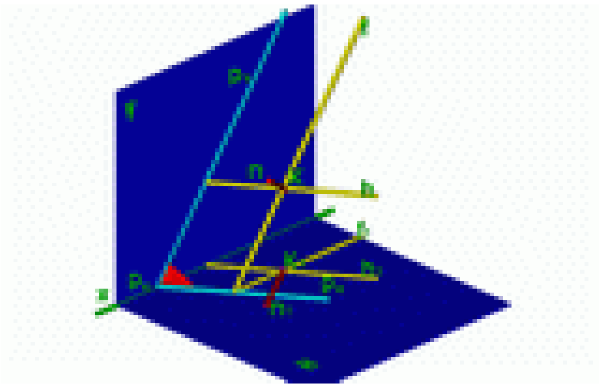


Рис.1

$n \to K$; $n \perp f$; $n \perp h$.
Следуя теореме о проецировании прямого угла $n_1 \perp h_1$ и $n_2 \perp f_2$.

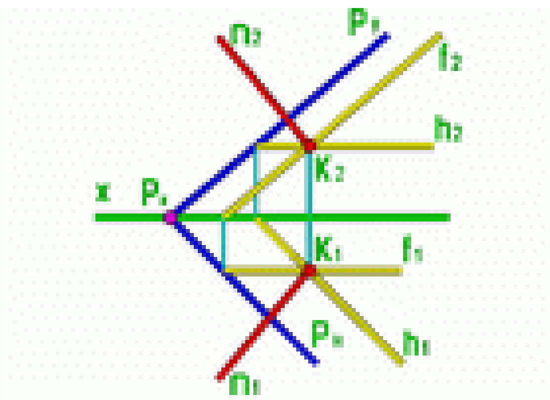


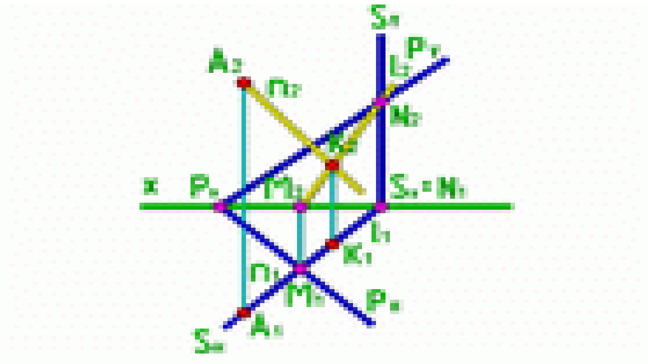
Рис.2

Следовательно, если прямая перпендикулярна плоскости, то её горизонтальная проекция перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали, а фронтальная проекция - фронтальной проекции фронтали.

Так как $h_1 \parallel P_H$, а $f_2 \parallel P_V$, то $n_1 \perp P_H$ и $n_2 \perp P_V$.

То есть, если прямая перпендикулярна плоскости, то её горизонтальная проекция перпендикулярна горизонтальному следу плоскости, а фронтальная проекция - фронтальному следу плоскости.

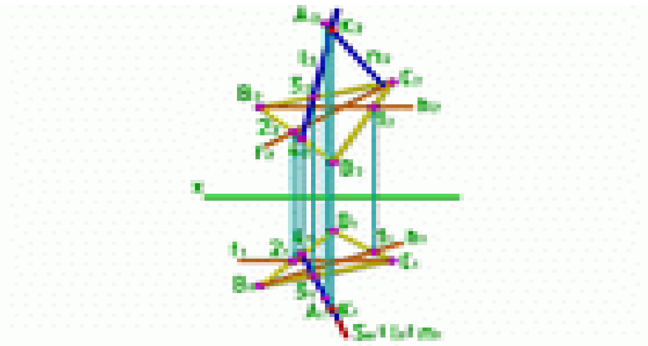
Пример 1: Даны плоскость P, заданная следами, и точка A. Нужно опустить из точки A перпендикуляр на плоскость P и найти его основание.



$A \in n$
$n_2 \perp P_V$
$n_1 \perp P_H$
$n \in S$
$S \perp H$

Рис.3

Пример 2: Даны плоскость P, заданная треугольником BCD, и точка A. Нужно из точки A опустить перпендикуляр на плоскость P($\triangle$BCD) и найти его основание.



$[B_1] \in h$
$[C_2] \in f$
$n_2 \perp f_2$
$n_1 \perp h_1$
$n \in S$
$S \perp H$
$l = S \cap P$
$K = l \cap n$

Рис.4

9. Перпендикулярность прямых общего положения.

Построение перпендикуляров к плоскости, перпендикулярных прямых и перпендикулярных плоскостей является основными графическими операциями при решении метрических задач.

Прямой угол между перпендикулярными прямыми общего положения на плоскости проекций проецируется с искажениями, поэтому задачу о построении перпендикуляра к прямой общего положения решают с помощью условия перпендикулярности прямой и плоскости.

Рассмотрим случай построения перпендикуляра из точки A к прямой общего положения m.

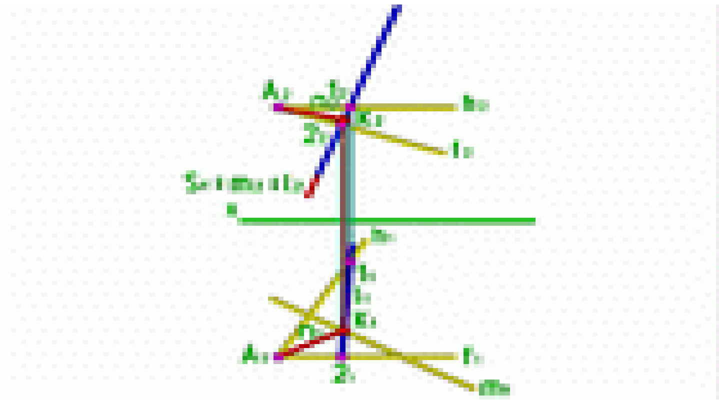
Эта задача решается следующей последовательностью графических операций:

1. Через точку A проводится плоскость Q, перпендикулярная прямой m.
2. Определяется точка встречи прямой m с плоскостью Q. $K = m \cap Q$.
   Для этого проводят вспомогательную плоскость S. $m \in S$; $l = S \cap Q$.
3. Соединяют точку A с точкой K. $AK \perp m$, так как он лежит в плоскости, перпендикулярной прямой m.

Таким образом, две прямые перпендикулярны, если одна из них лежит в плоскости, перпендикулярной другой прямой.

Чтобы посмотреть, как эти построения выполнить на эпюре, рассмотрим пример:

Даны прямая общего положения m и точка A. Требуется опустить перпендикуляр из точки A на прямую m.



$Q(h \cap f)$ $A \in Q$;
$f_2 \perp m_2$ $h_1 \perp m_1$ $Q \perp m$;
$m \in S$;
$l = S \cap Q$
$K = m \cap l$
$AK \perp m$.

Рис.5

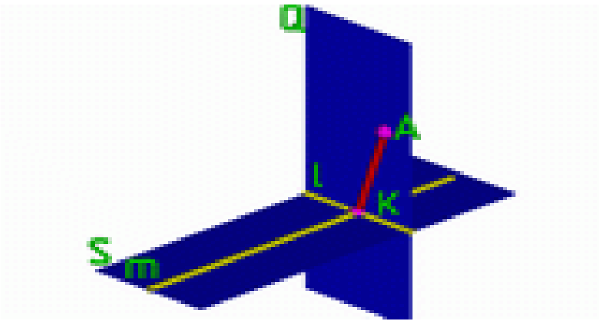


Рис.6

10. Перпендикулярность плоскостей.

Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них содержит прямую, перпендикулярную другой плоскости.

Поэтому построение плоскости P, перпендикулярной к плоскости Q, можно осуществить двумя путями:

1. Проводим прямую m, перпендикулярную к плоскости Q, затем прямую m заключаем в плоскость P.
   $(m \perp Q) \wedge (m \in P) \Rightarrow P \perp Q$
2. Проводим прямую n, перпендикулярную или параллельную плоскости Q, затем строим плоскость P, перпендикулярную к прямой n.
   $(n \parallel Q) \wedge (n \perp P) \Rightarrow P \perp Q$

Так как через прямую m можно провести множество плоскостей (первый путь решения) и в плоскости или параллельно её можно провести множество прямых n (второй путь решения), то задача имеет множество решений.

Поэтому для получения единственного решения нужно наложить дополнительные условия, например, потребовать, чтобы плоскость P проходила через точку A, принадлежащую другой плоскости (Q).

Пример: Даны плоскость P (ΔABC) и точка D. Нужно через точку D провести плоскость $Q \perp P$.

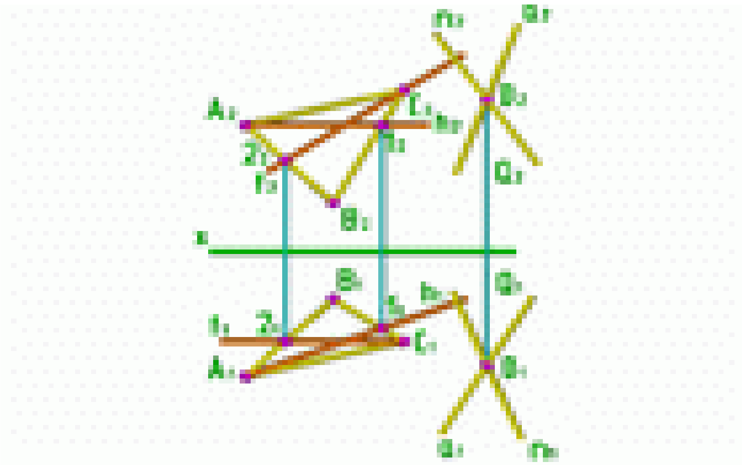


Рис.7

$a \in Q$, $D \in a$.
Плоскость P удобно задать: $[C_1] \in h$ $[A_2] \in f$
$n_2 \perp f_2$ $n_1 \perp h_1$ $(D \in n)$
$Q(n \cap a)$

Рассмотрим случай когда горизонтально проецирующая плоскость S перпендикулярна к плоскости общего положения P.

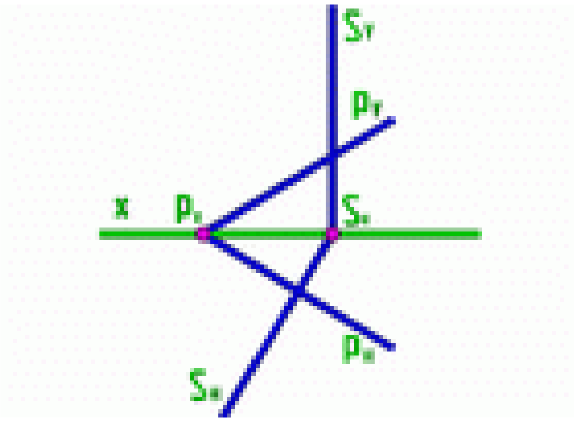


Рис.8

Если $(S \perp H) \wedge (S \perp P)$, то $S \perp P_H$, как к линии пересечения плоскостей P и H. $P_H = P \cap H$.
Отсюда $P_H \perp S$ и, следовательно $P_H \perp S_H$, как к одной из прямых в плоскости S.

Однако, если одноимённые следы двух плоскостей общего положения взаимно перпендикулярны, то сами плоскости не перпендикулярны между собой, так как при этом не соблюдается условие перпендикулярности плоскостей.

IV МЕТОДЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ
1. Метод замены плоскостей проекций:
1.1 Замена фронтальной плоскости проекций.
1.2 Замена горизонтальной плоскости проекций.
1.3 Основные задачи замены плоскостей проекций.

Лекции: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

IV МЕТОДЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ

Пример: Даны фронтально-проецирующая плоскость S и точка A. Нужно найти расстояние от точки A до плоскости S.

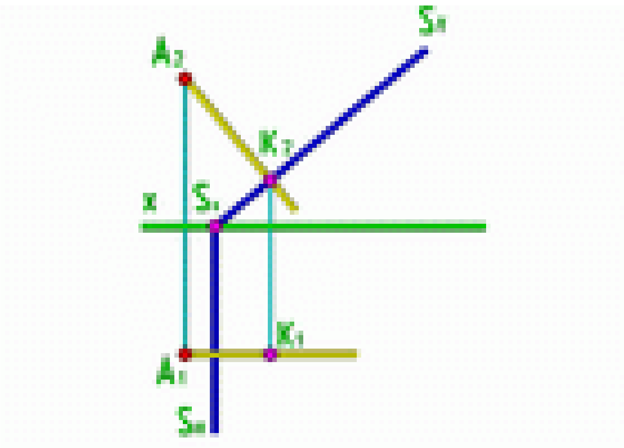


Рис.1

Решение задачи получается более простым, если геометрические фигуры занимают частное положение относительно плоскостей проекций.

Перевод геометрической фигуры из общего положения в частное может быть осуществлён двумя путями:

1. Перемещением плоскостей проекций в положение, относительно которых плоские фигуры занимали бы частное положение (были бы параллельны или перпендикулярны плоскостям проекций).
2. Перемещением плоской фигуры в пространстве в частное положение относительно плоскостей проекций, причём положение плоскостей проекций при этом остаётся неизменным.

Первый путь лежит в основе метода замены плоскостей проекций, а второй - в основе следующих методов:

1. Вращение вокруг линии уровня.
2. Вращение вокруг проецирующих прямых.

Методы преобразования проекций позволяют значительно упростить решение метрических и некоторых позиционных задач.

1. Метод замены плоскостей проекций.

Этот метод заключается в том, что заданные в пространстве геометрические фигуры не изменяют своего положения, а в системе плоскостей проекций V и H последовательно заменяют одну, две и более плоскостей проекций. При этом вновь введёная плоскость проекций должна быть перпендикулярна остающейся плоскости проекций, а относительно плоских геометрических фигур она должна быть поставлена в такое положение, чтобы эти фигуры были параллельны или перпендикулярны по отношению к ней.

Переход от некоторой системы плоскостей проекций к новой может быть осуществлён по одной из схем:

1. $x\frac{V}{H} \rightarrow x_1\frac{V_1}{H} \rightarrow x_2\frac{V_1}{H_1}$
2. $x\frac{V}{H} \rightarrow x_1\frac{V}{H_1} \rightarrow x_2\frac{V_1}{H_1}$

Схемы показывают, что одновременно меняется только одна плоскость проекций V (или H), другая плоскость H (или V) остаётся неизменной.

1.1 Замена фронтальной плоскости проекций.

Пусть в системе плоскостей $x\frac{V}{H}$ дана точка A и указаны её проекции A_1 A_2.

Проследим как изменится положение проекций точки A, если плоскость V заменить новой плоскостью V_1 ($V_1 \perp H$).

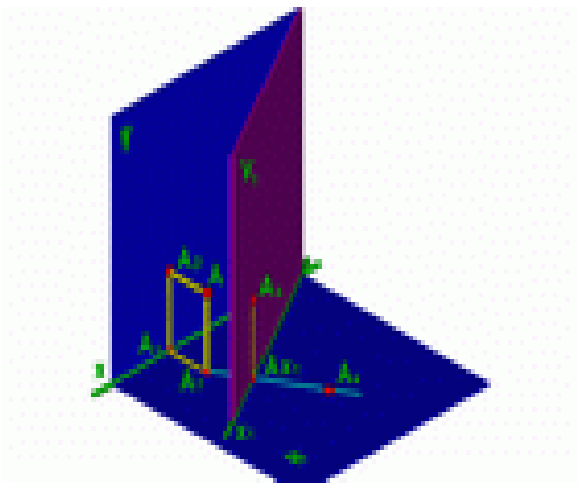


Рис.2

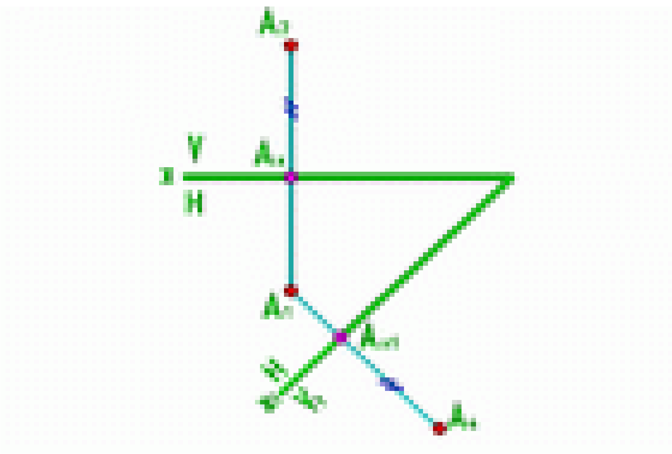


Рис.3

Плоскость V_1 пересекается с плоскостью H по прямой x_1, которая определяет новую ось проекций. Положение горизонтальной проекции A_1 точки A остаётся без изменений, так как точка A и плоскость H не меняли своего положения в пространстве.

Для нахождения нофой фронтальной проекции точки A - A_4 достаточно спроецировать ортогонально точку A на плоскость V_1. Расстояние новой фронтальной проекции A_4 точки A от новой оси x_1 равно расстоянию от старой фронтальной проекции A_2 точки A до старой оси x.

$|A_4x_1|=|A_2x|=|AA_1|$.

При построении комплексного чертежа новая плоскость проекций V_1 вращением вокруг новой оси x_1 совмещается с остающейся плоскостью H. Направление вращения не влияет на результат решения задачи. Вращение следует делать так, чтобы новые проекции не накладывались на старые.

1.2 Замена горизонтальной плоскости проекций.

Замена горизонтальной плоскости проекций H новой плоскостью H_1 и построение новых проекций точки A в системе $x_1\frac{V}{H_1}$осуществляется аналогично рассмотренному случаю. Теперь без изменения остаётся фронтальная проекция точки, а для нахождения новой горизонтальной проекции A_4 точки A необходимо из старой фронтальной проекции точки опустить перпендикуляр (провести линию связи) на новую ось x_1 и отложить на нём от точки пересечения с осью x_1 отрезок равный расстоянию старой горизонтальной проекции от старой оси x.

$|A_4x_1|=|A_1x|=|AA_2|$.

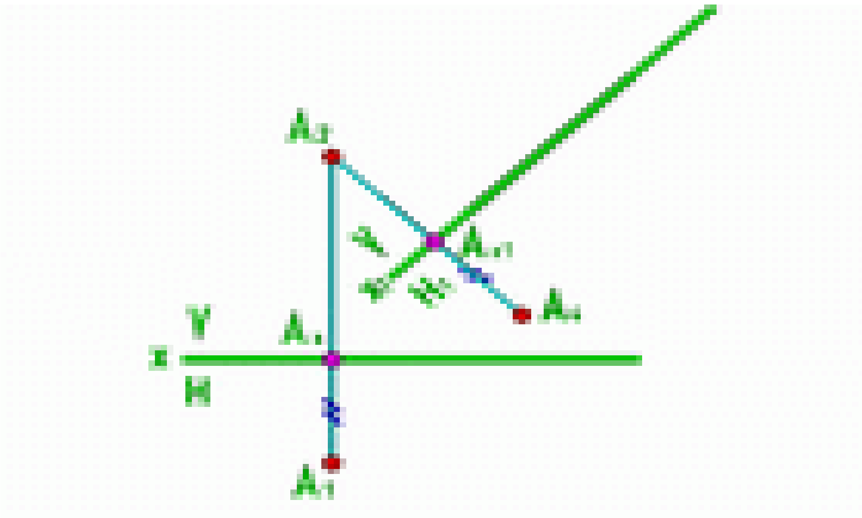


Рис.4

1.3 Основные задачи замены плоскостей проекций.

Решение всех задач методом замены плоскостей проекций сводится к решению 4-х основных задач:

Первая задача: Заменить плоскость проекций так, чтобы прямая общего положения стала прямой уровня.

Вторая задача: Заменить плоскость проекций так, чтобы прямая уровня стала проецирующей прямой.

Решим обе задачи совместно:

Решение первой задачи: Пусть задана прямая общего положения отрезком [AB]. Заменим плоскость V на V_1

$(V_1\perp H)\wedge(V_1\parallel[AB])\Rightarrow x_1\parallel[A_1B_1]$

$[A_1A_4]\perp x_1$ $[B_1B_4]\perp x_1$

$B_2B_x=B_{x1}B_4$ $A_2A_x=A_{x1}A_4$

$|A_4B_4|=|AB|$ α- угол наклона AB к плоскости H.

Решение второй задачи: Заменим плоскость H на H_1

$(H_1\perp V_1)\wedge(H_1\perp[AB])\Rightarrow x_2\perp[A_4B_4]$

$A_{x2}A_5=B_{x2}B_5=A_1A_{x1}=B_1B_{x1}$

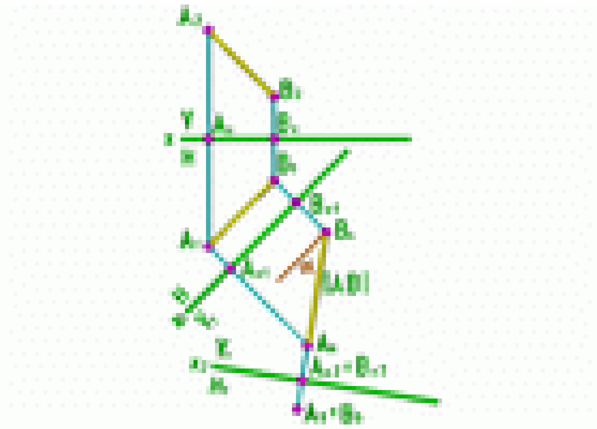


Рис.5

Таким преобразованием можно решать задачи об определении истинной величины отрезка и углов наклона его к плоскостям проекций.

Совместное рассмотрение первой и второй задач позволяет решать задачи об определении:

1. расстояния от точки до прямой
2. расстояния между двумя параллельными прямыми
3. расстояния между скрещивающимися прямыми

Третья задача: Заменить плоскость проекций так, чтобы плоскость общего положения стала проецирующей плоскостью.

Четвёртая задача: Заменить плоскость проекций так, чтобы проецирующая плоскость стала плоскостью уровня.

Решим обе задачи совместно:

Решение третьей задачи: Пусть задана плоскость общего положения P(ΔABC)
Заменим V на V_1 $(V_1 \perp H) \wedge (V_1 \perp P)$ $x_1 \perp [A_1 1_1]$
α- угол наклона плоскости P к плоскости H.

Решение четвёртой задачи: Заменим H на H_1 $(H_1 \perp V_1) \wedge (H_1 \parallel P)$ $x_2 \parallel [C_4B_4]$

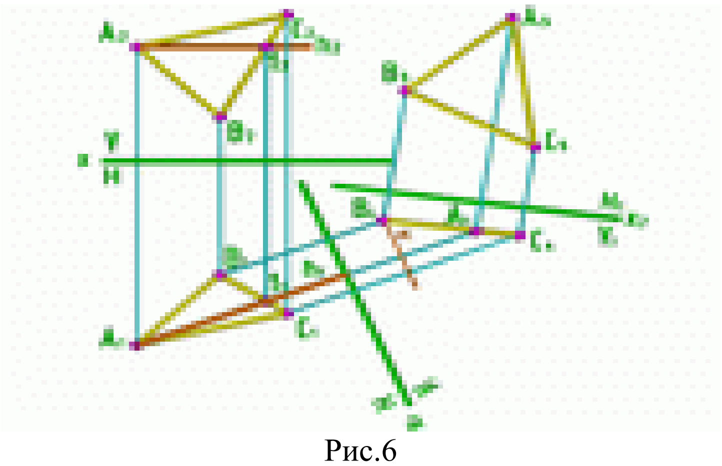


Рис.6

С помощью такого преобразования можно решать задачи на определение: углов наклона плоскости к плоскости проекций, расстояния от точки до плоскости, расстояния между параллельными плоскостями.

Совместное решение задач 3 и 4 позволяет решать задачи на определение: натуральных величин плоских фигур, углов между пересекающимися прямыми, расстояния между параллельными прямыми, расстояния от точки до прямой.

2. Вращение вокруг прямых уровня.
3. Совмещение - вращение вокруг следа плоскости.
Лекции: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

2. Вращение вокруг прямых уровня.

Сущность способов вращения заключается в том, что заданную геометрическую фигуру путём вращения вокруг некоторой оси перемещают в пространстве до тех пор, пока она не займёт частное положение относительно плоскостей проекций.

Эффективным приёмом, упрощающим решение задач, связанных с определением метрических характеристик плоских фигур, является способ вращения этих фигур вокруг их линий уровня. Путём такого вращения можно плоскость, которой принадлежит рассматриваемая фигура, повернуть в положение, параллельное плоскости проекции.

(Сущность способа в том, что путём вращения вокруг линий уровня плоскость, в которой расположена фигура, переводится в положение, параллельное той плоскости проекций, которой параллельна прямая частного положения (линия уровня)).

При этом плоская фигура будет без искажения проецироваться на эту плоскость проекций.

При вращении вокруг горизонтали плоская фигура переводится в положение, параллельное плоскости H, при вращении вокруг фронтали в положение, параллельное плоскости V.

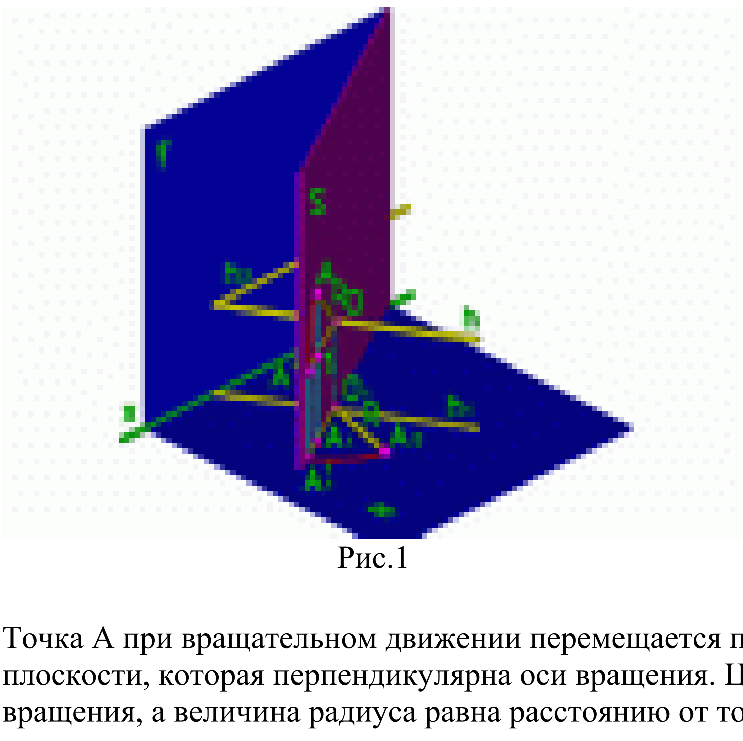


Рис.1

Точка A при вращательном движении перемещается по дуге (окружности), расположенной в плоскости, которая перпендикулярна оси вращения. Центр окружности будет находиться на оси вращения, а величина радиуса равна расстоянию от точки до оси вращения.

Т.к. в нашем случае ось вращения - горизонталь, то, следовательно, траектория точки A будет находиться в горизонтально-проецирующей плоскости.

$S \perp H$; $S \perp h$; $S_H \perp h_1$; $[OA^I] \parallel H$
Точка O - центр вращения $O = S \cap h$
$AA^I \rightarrow [A_1 A^I_1] \perp h_1$
На плоскость V окружность проецируется в эллипс (это построение мы не делаем).

Для того, чтобы на комплексном чертеже переместить точку A путём вращения вокруг линии уровня, нужно знать:

1. центр вращения,
2. истинную величину радиуса вращения.

Центр вращения O, как уже отмечено, находится в точке пересечения h с плоскостью S. Чтобы определить величину радиуса вращения |OA|, необходимо построить в плоскости H прямоугольный треугольник $\Delta O_1A_1A_0$. $\Delta O_1A_0A_1 \equiv \Delta OA1$ Для этого за катет принимаем горизонтальную проекцию $[O_1A_1]$ отрезка OA; второй катет равен разности аппликат концов отрезка OA $|z_A - z_A{}^I| = |A1|$. Гипотенуза $\Delta O_1A_1A_0$ это $O_1A_0 = R$.

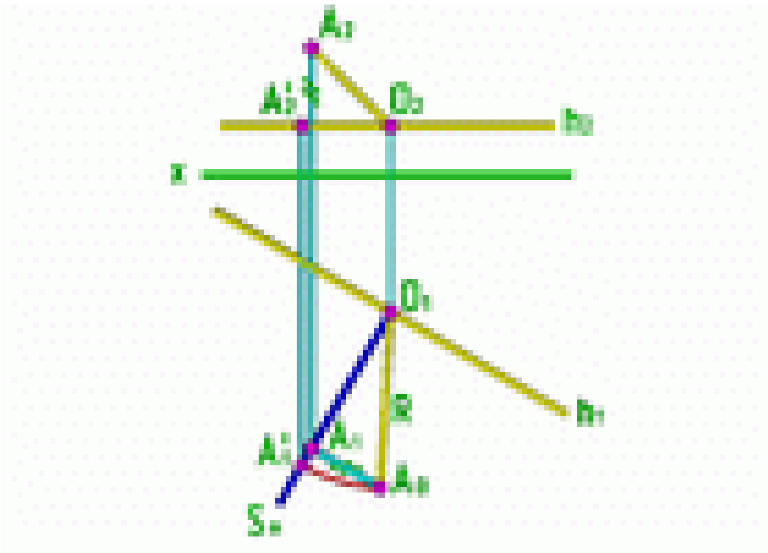


Рис.2

Новое, после поворота, положение точки A^I_1 находится в месте пересечения дуги окружности, проведённой из горизонтальной проекции центра вращения O_1, радиусом, равным $[O_1A_0]$ с горизонтальным следом S_H плоскости S.

Пример: Дана плоскость P (ΔABC) - общего положения. Нужно вращением вокруг фронтали определить истинную величину треугольника (ΔABC).

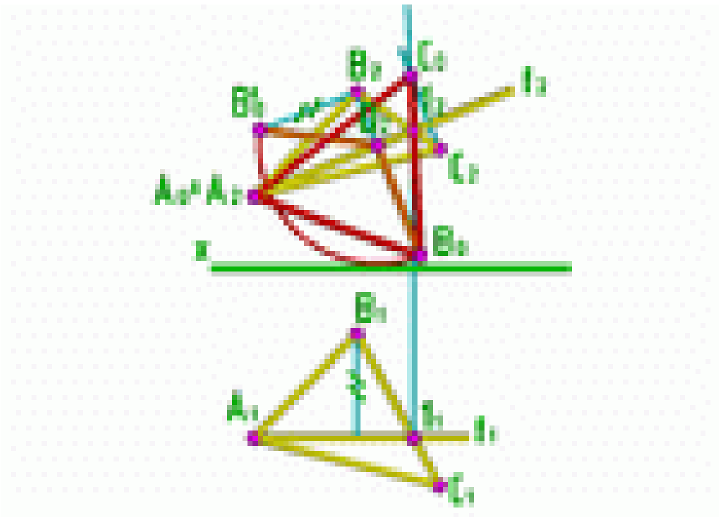


Рис.3

Ход решения:

1. Строим фронталь в плоскости P;
2. Из точки B_2 проводим перпендикуляр к f_2;
3. Из точки C_2 проводим перпендикуляр к f_2;
4. $R=O_2B^I_0$

3. Совмещение - вращение вокруг следа плоскости.

Совмещение является частным случаем вращения плоскости вокруг горизонтали или фронтали. При совмещении за ось вращения принимается не произвольная горизонталь или фронталь плоскости, а её горизонтальный или фронтальный след (нулевые горизонталь или фронталь). В этом случае в результате поворота плоскости она совпадает (совмещается) с плоскостью проекций H, если вращение осуществляется вокруг горизонтального следа плоскости, либо с V при вращении её вокруг фронтального следа.

Метод совмещения применяется тогда, когда требуется определить истинный вид геометрических фигур или построить в плоскости общего положения фигуры заданной формы и размеров.

Задача. Совместим плоскость Q общего положения, заданную следами, вращением вокруг следа Q_H с плоскостью H.

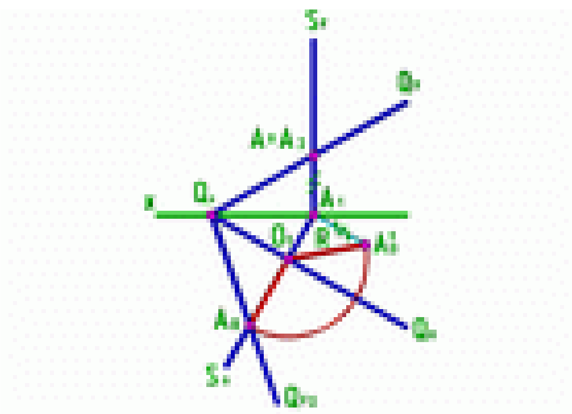


Рис.4

При этом преобразовании след Q_H как ось вращения остаётся на месте. Поэтому для нахождения совмещённого положения плоскости достаточно найти совмещённое положение только одной принадлежащей ей точки (не лежащей на следе Q_H).

В качестве такой точки целесообразно (для упрощения геометрических построений) взять точку, принадлежащую фронтальному следу Q_V.

Точка A при вращении вокруг оси Q_H будет перемещаться по дуге окружности, принадлежащей плоскости S, перпендикулярной к оси вращения
$(S \perp H) \wedge (S_H \perp Q_H)$

Следует отметить, что совмещённое положение точки A и следа Q_V-Q_{V0} (да и любой точки, принадлежащей плоскости Q) можно построить, не пользуясь центром и радиусом вращения. Для этого достаточно из точки Q_x описать дугу радиусом, равным расстоянию $|Q_xA_2|$ до её пересечения с прямой (горизонтальным следом S_H плоскости S, в которой будет перемещаться точка A), проведённой через A_1 перпендикулярно к Q_H. Через полученную точку пройдёт фронтальный след плоскости Q_{V0} при совмещении его с плоскостью H.

Это следует из того, что любая геометрическая фигура, лежащая в плоскости Q, при её совмещении с плоскостью H проецируется в конгруэнтную фигуру.
$(\Phi \in Q) \wedge (\Phi \rightarrow \Phi_0) \Rightarrow \Phi \equiv \Phi_0$; $[A_2Q_x] \equiv [A_0Q_x]$

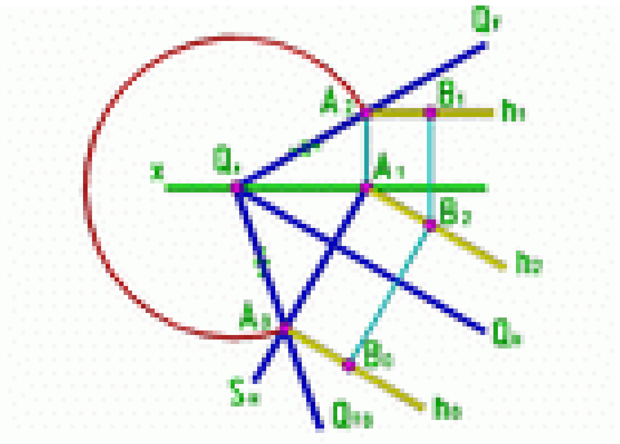


Рис.5

Пример: Дана плоскость Q общего положения и фронтальная проекция ΔABC, лежащего в этой плоскости. Вращением вокруг горизонтального следа Q_H определить истинную величину ΔABC.

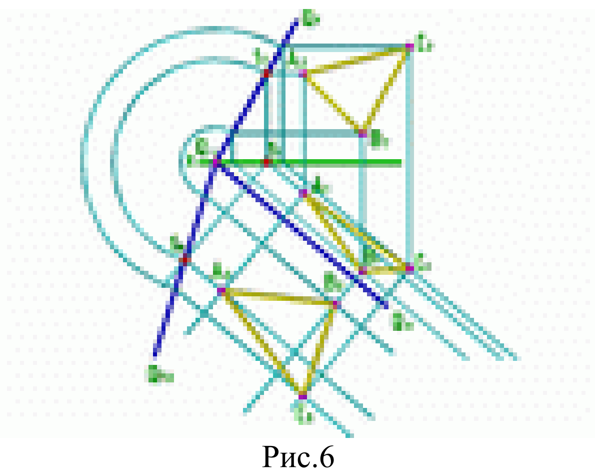


Рис.6

12 13

V ОБРАЗОВАНИЕ И ИЗОБРАЖЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Поверхностью называется совокупность всех последовательных положений линий, непрерывно перемещающихся в пространстве.

Следовательно, всякую поверхность можно представить как перемещение линии по другим линиям.

Линия, образующая поверхность, называется **образующей**.

Линия, по которой перемещается образующая, называется **направляющей**.

Образующие могут быть постоянными и изменяться.

1. Классификация поверхностей. Задание поверхности на комплексном чертеже.

Поверхности разделяют:

1. По закону образования - на закономерные и незакономерные.
   Закономерные задаются графически и аналитически, незакономерные - только графически.
2. По признаку развёртывания в плоскость - развёртывающиеся и неразвёртывающиеся.
3. По форме образующей:
   - с прямолинейными образующими - линейчатые поверхности;
   - с криволинейной образующей - кривые поверхности.
4. По способу перемещения образующей:
   - с поступательным движением образующей;
   - с вращательным движением образующей - поверхности вращения;
   - с движением образующей по винтовой линии - винтовые поверхности.

Поверхности на комплексном чертеже могут быть заданы:

1. Проекциями направляющих и способом перемещения по ним образующих.
2. Семейством линий, принадлежащих поверхности - каркасный способ задания поверхности.
3. Очерком поверхности, т.е. линиями, ограничивающими на комплексном чертеже область существования проекций.

2. Линейчатые поверхности:

Линейчатая поверхность в общем случае однозначно определяется тремя направляющими линиями, т.е. при перемещении по ним образующей.

Линейчатые поверхности делятся на развёртывающиеся и неразвёртывающиеся.

К развёртывающимся относятся: цилиндрические поверхности, конические поверхности, поверхности с ребром возврата (торса), призматические поверхности, пирамидальные поверхности.

2.1 Циллиндрическая поверхность.

Цилиндрическая поверхность образуется перемещением прямолинейной образующей l по криволинейной направляющей m, причём образующая l остаётся постоянно параллельной заданной направляющей S.

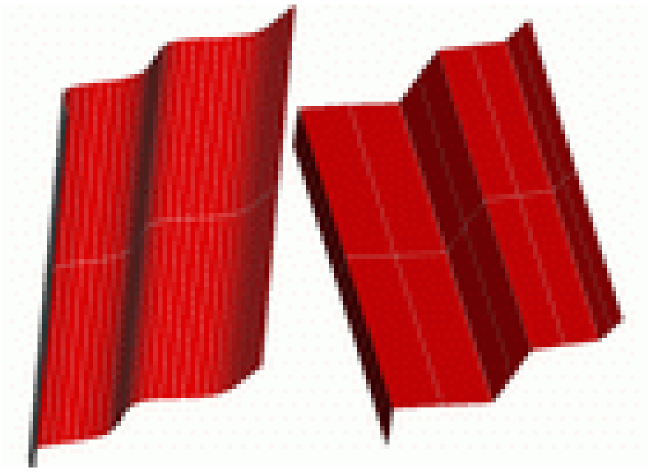


Рис.1

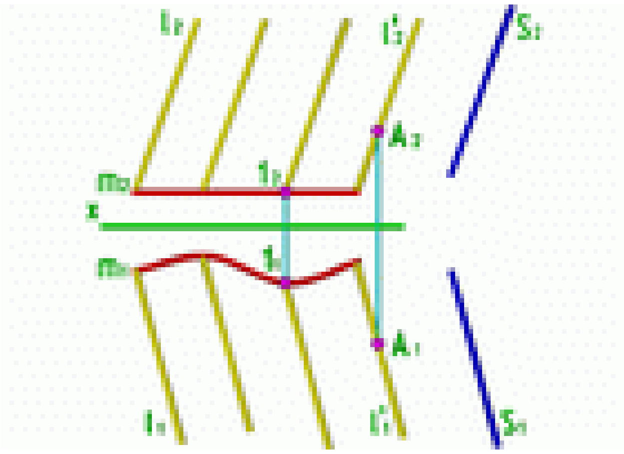


Рис.2

Если точка лежит на поверхности, то она лежит на её образующей.

В частном случае, когда направляющая ломаная, получается призматическая поверхность.

2.2 Коническая поверхность.

Коническая поверхность получается при движении прямолинейной образующей l по криволинейной направляющей m, причём образующая l постоянно проходит через неподвижную точку S.

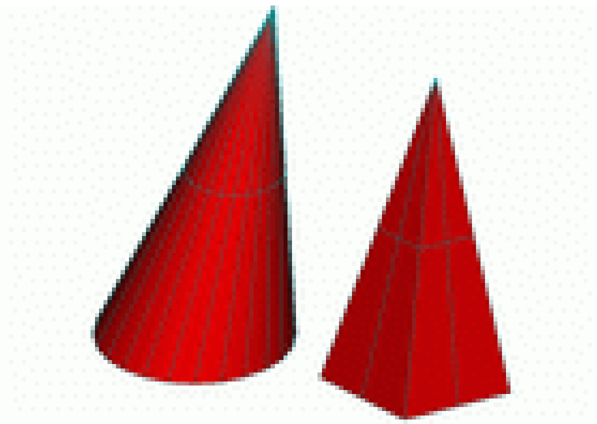


Рис.3

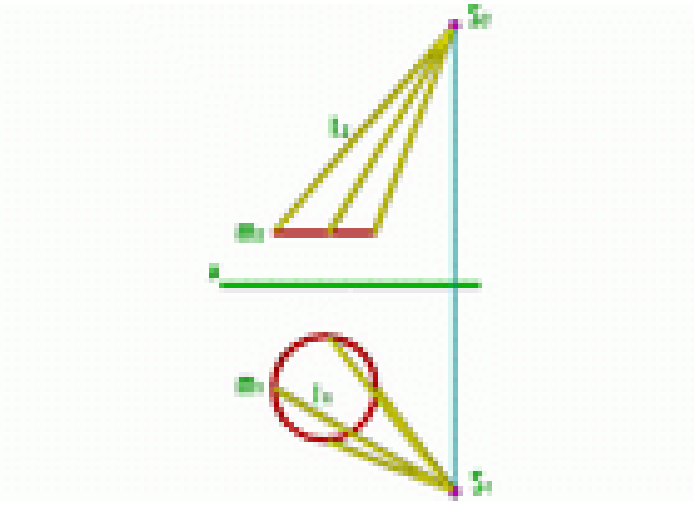


Рис.4

В частном случае, когда направляющая ломаная, получается пирамидальная поверхность.

2.3 Цилиндроид, коноид, косая плоскость.

Неразвёртывающиеся линейчатые поверхности - это поверхности с плоскостью параллелизма.

Цилиндроид - образуется движением по двум криволинейным направляющим m и n прямолинейной образующей l, остающейся всё время параллельной плоскости параллелизма.

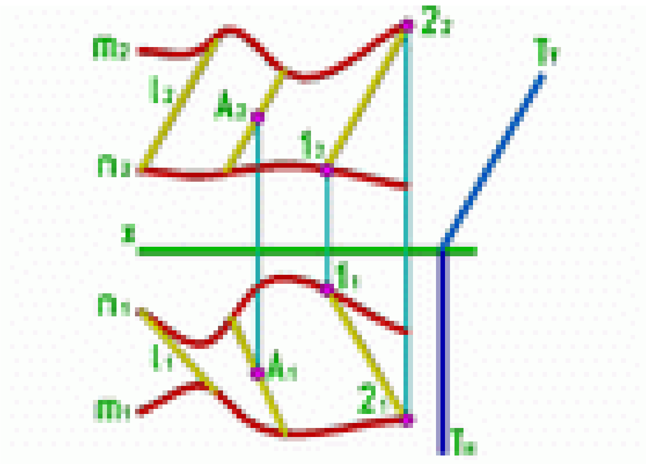


Рис.5

Коноид - отличается от цилиндроида тем, что одна из направляющих - прямая.

Косая плоскость - отличается от цилиндроида тем, что обе направляющие - прямые. Они скрещиваются и параллельны некоторой плоскости (плоскости параллелизма).

3. Поверхности вращения:

Поверхностью вращения общего вида называется поверхность, которая образуется произвольной кривой (плоской или пространственной) при её вращении вокруг неподвижной оси.

В частном случае, при вращении прямой a вокруг оси m, если прямая a пересекает ось m в несобственной точке, получается цилиндрическая поверхность, а если в собственной точке - коническая поверхность.

Каждая точка образующей описывает окружность, называемую **параллелью**. Наибольшая и наименьшая параллели называются соответственно **экватором и горлом**.

Плоскости, проходящие через ось вращения, называются **меридиональными**, они пересекают поверхность вращения по линиям, называемым **меридианами**.

Меридиональная плоскость, параллельная плоскости V, называется **главной меридиональной плоскостью**, а линии, по которым эта плоскость пересекает поверхность вращения, называются **главными меридианами**.

В технике широкое распространение получили поверхности вращения второго порядка - цилиндр, конус, сфера.

3.1 Однополостный гиперболоид.

Однополостный гиперболоид вращения образуется при вращении гиперболы вокруг мнимой оси.

Эта поверхность может быть также получена вращением прямолинейной образующей l вокруг оси k, причём l скрещивается с k (l∸i).

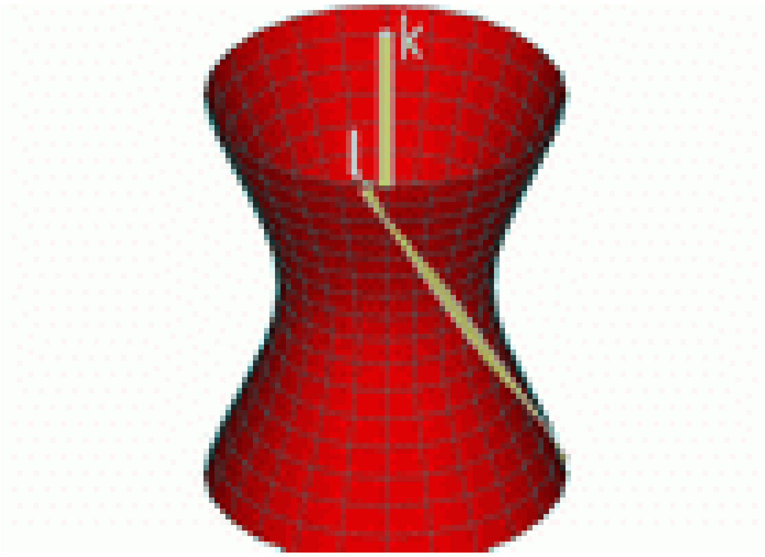


Рис.6

3.2 Двухполостный гиперболоид.

Двухполостный гиперболоид вращения получается вращением гиперболы вокруг действительной оси.

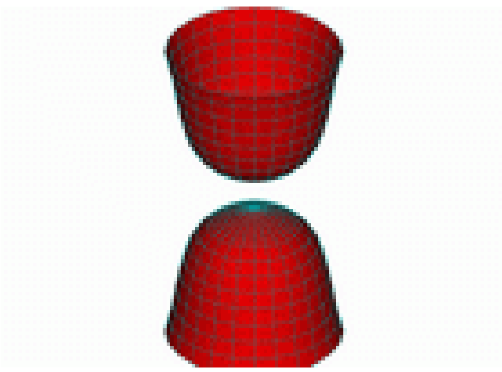


Рис.7

3.3 Тор.

Тор получается при вращении окружности m вокруг оси k, лежащей в плоскости окружности, но не (пересекающей окружность) проходящей через её центр O.

Тор это поверхность 4-го порядка.

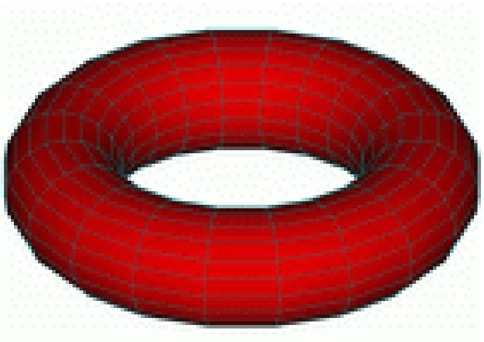


Рис.8

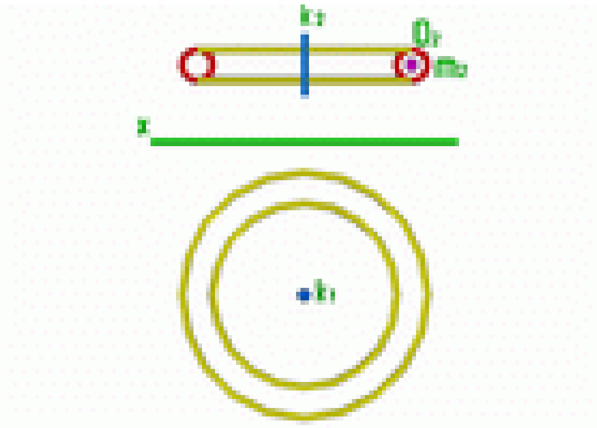


Рис.9

4. Винтовые поверхности.

Винтовые поверхности образуются при движении произвольной образующей по винтовой направляющей. Если образующая - прямая линия, то образованные поверхности называются **геликоидами**.

VI ПОВЕРХНОСТИ

Пересечение поверхностей плоскостью. Развёртка поверхностей.

При пересечении поверхности плоскостью получается плоская фигура, которую называют **сечением.** Сечение поверхности плоскостью - плоская кривая, принадлежащая секущей плоскости.

При сечении многогранника плоскостью это ломаная линия, при сечении кривой поверхности - кривая линия.

Развёрткой поверхности тела называется фигура, полученная путём совмещения боковой поверхности с плоскостью.

1. Пересечение многогранников плоскостью.

Многогранником называется пространственная фигура, ограниченная замкнутой поверхностью, состоящей из отсеков плоскостей, имеющих форму многоугольников.

Стороны многоугольников образуют **рёбра,** а плоскости многоугольников - **грани** многогранника.

Поэтому задачу по определению линии пересечения поверхности многогранника плоскостью можно свести к многократному решению задачи по нахождению:

а) линии пересечения двух плоскостей (граней многогранника и секущей плоскости)
или
б) точки встречи прямой (рёбер многогранника) с секущей плоскостью.

Пример. Дано: Трёхгранная пирамида SABC, стоящая на плоскости H, рассечена плоскостью общего положения P.

Нужно:

1. Построить сечение пирамиды плоскостью.
2. Определить видимость сечения и пирамиды на H и V.
3. Построить истинную величину сечения.
4. Построить развёртку нижней отсечённой части пирамиды.

Определим линию пересечения грани SAB с секущей плоскостью P и точку встречи ребра SC пирамиды SABC с секущей плоскостью P. Для этого введём плоскость-посредник Q. $[SC] \subset Q$

Натуральную величину сечения определим методом совмещения, для чего плоскость P поворачиваем вокруг следа P_H до совмещения с плоскостью H.

Проекциями сечения многогранников плоскостью в общем случае являются плоские многоугольники, вершины которых принадлежат рёбрам, а стороны - граням многогранника.

2. Развёртка поверхности многогранника.

Существует 3 способа построения развёртки многогранных поверхностей:

1. способ нормального сечения;

2. способ раскатки;
3. способ треугольников (триангуляции).

Первые два способа применяются для построения развёртки призматических гранных поверхностей, третий - для пирамидальных гранных поверхностей.

Воспользуемся третьим способом. Для этого нужно знать:

1. Натуральную величину рёбер, которую определяем по методу прямоугольного треугольника.
2. Натуральную величину сторон основания (они в данном случае равны своим горизонтальным проекциям).

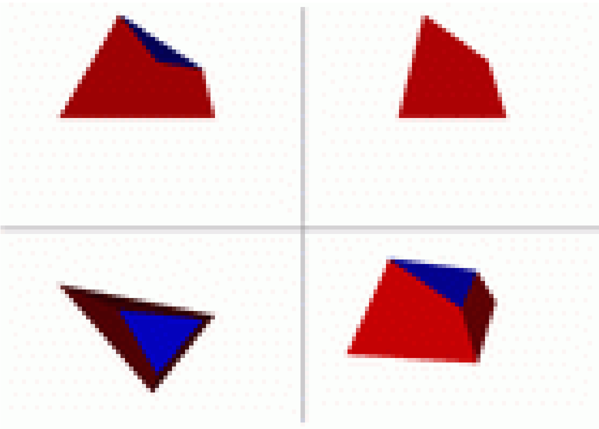


Рис.1

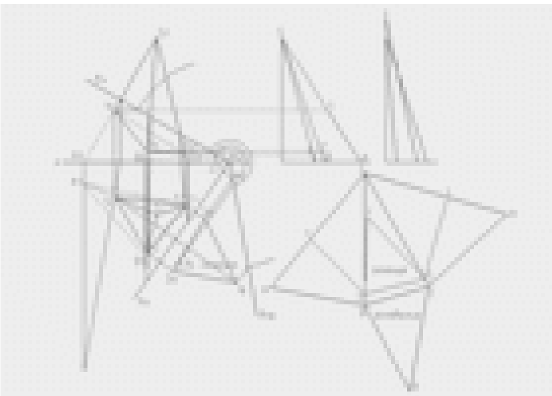


Рис.2

---

3. Пересечение поверхности вращения плоскостью.

При пересечении поверхности вращения плоскостью могут получиться следующие кривые:

а). Цилиндр вращения:

1. эллипс - когда секущая плоскость $\not\perp$ и $\not\parallel$ оси вращения.
2. окружность - когда секущая плоскость $\perp$ оси вращения.
3. две $\parallel$ прямые - когда секущая плоскость $\parallel$ оси вращения.
4. прямая линия - когда секущая плоскость касательна к поверхности цилиндра.

б). Конус вращения:

Поверхность прямого кругового конуса является носителем кривых 2-го порядка: окружности, эллипса, параболы, гиперболы, которые поэтому также называются **коническими сечениями**.

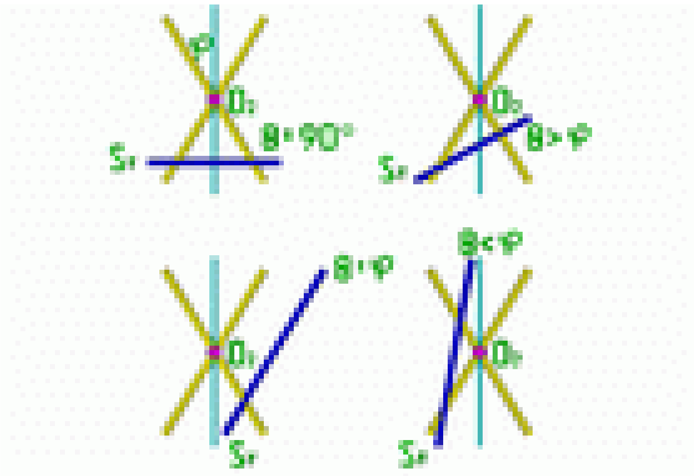


Рис.1

φ- угол наклона образующей конуса к его оси.
Θ- угол наклона между секущей плоскостью и той же осью.

1. эллипс - когда секущая плоскость пересекает все образующие конуса (т.е. $\not\perp$ и $\nparallel$). $\Theta>\varphi$
2. окружность - когда секущая плоскость $\perp$ оси вращения. $\Theta>\varphi^{I}$, $\Theta=90^{\circ}$
3. парабола - когда секущая плоскость $\parallel$ одной образующей конуса. $\Theta=\varphi$
4. гипербола - когда секущая плоскость $\parallel$ оси вращения конуса или каким-либо двум образующим конуса. $\Theta<\varphi$
5. две пересекающиеся прямые, прямая или точка, когда секущая плоскость проходит через вершину конуса.

Чтобы построить линию пересечения поверхности вращения плоскостью, необходимо:

1. Ввести ряд вспомогательных плоскостей.
2. Построить линии пересечения вспомогательной плоскости с заданными плоскостью и поверхностью.
3. Определить точки взаимного пересечения построенных линий, которые принадлежат искомой линии пересечения.

Выбор вспомогательных плоскостей производится из следующих соображений:

a. Вспомогательные плоскости при пересечении с заданной поверхностью должны давать линии пересечения простого вида (прямая, окружность).
b. В результате применения вспомогательных плоскостей должны получаться точки, принадлежащие кривой сечения, наиболее характерные для этой кривой.

К характерным точкам кривой сечения относятся:

- высшая и низшая точки сечения;
- точки, разделяющие видимую и невидимую части сечения;
- точки, являющиеся концами большой и малой осей эллипса (в некоторых случаях эти точки могут совпадать).

4. Развёртка поверхностей вращения.

Дано: Прямой круговой конус, стоящий на плоскости проекций H, рассечён плоскостью общего положения P.

Нужно:

1. Построить линию сечения конуса плоскостью.
2. Определить видимость сечения и конуса на H и V.
3. Построить истинную величину сечения.
4. Построить развёртку нижней отсечённой части конуса.

Задача пересечения конуса плоскостью решается следующим образом:

1. Для удобства делим горизонтальную проекцию основания (окружность) на 8 частей.
2. Большая ось эллипса находится на прямой проходящей через вершину конуса и перпендикулярной горизонтальному следу секущей плоскости P.
3. Разделив большую ось пополам можно найти центр эллипса сечения - O.
4. Если через точку O провести горизонтальную плоскость, то она пересекает заданный конус по окружности, а заданную плоскость P по горизонтали. В результате этого можно получить точки ограничивающие малую ось эллипса сечения.
5. Проводим фронтальную плоскость T через вершину конуса. Вспомогательная плоскость T пересекает конус по очерковым образующим S1 и S5, а заданную секущую плоскость по фронтали. В результате этого получаем точки a и d, принадлежащие кривой сечения и определяющие границу видимости этой кривой на фронтальной плоскости проекций.
6. Для построения промежуточных точек b, c, e, f находим точки пересечения соответсвующих образующих с секущей плоскостью.

Натуральную величину сечения определяем методом совмещения плоскости P с плоскостью H, для чего плоскость P вращаем вокруг её горизонтального следа.

Для построения развёртки:

1. Поверхность конуса мысленно режем по образующей S1.
2. Определяем угол кругового сектора φ° =180*D/L
3. Зная угол кругового сектора, выполняем полную развёртку кругового сектора.
4. Длину окружности основания конуса делим на равные части (чем больше, тем лучше).
5. Дугу кругового сектора делим на такое же количество частей. На развёртке проводим образующие.
6. На развёртке наносим точки сечения, которые находятся на образующих S1 - S8.
7. Полученные точки на развёртке соединяем плавной кривой линией.
8. К развёртке боковой поверхности конуса пристраиваем натуральные величины основания и сечения.

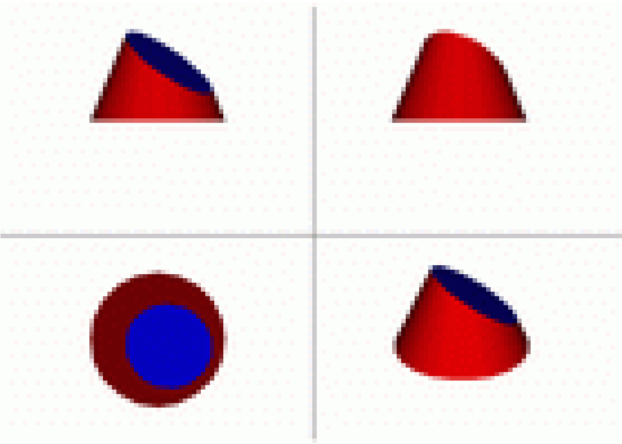


Рис.2

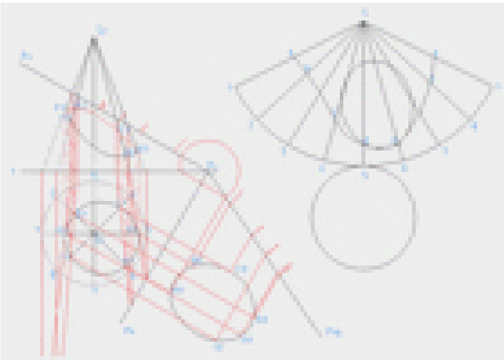


Рис.3

5. Взаимное пересечение поверхностей вращения. Лекции: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

5. Взаимное пересечение поверхностей вращения.

Линией пересечения поверхностей вращения является пространственная кривая, иногда распадающаяся на плоские кривые или прямые.

В более общих случаях проекции линии пересечения строятся по точкам, определяемым с помощью поверхностей-посредников.

Идею способа можно кратко записать так:

$(\forall A)(A_i \in l)[A_i = (\gamma_i \cap \alpha) \cap (\gamma_i \cap \beta)]$

Любая i-я точка линии пересечения поверхностей α и β определяется как общая точка пересечения линий пересечения i-й поверхности-посредника (γ_i) с поверхностями α и β.

В качестве поверхностей-посредников выбирают такие, которые дают простые линии пересечения - прямые или окружности. Поэтому в качестве поверхностей-посредников выбирают либо сферы, либо плоскости.

Линии пересечения имеют характерные точки:

1. точки, принадлежащие фронтальному и горизонтальному очерку поверхностей;
2. высшие и низшие точки относительно плоскости, перпендикулярной к оси вращения.

Характерные точки позволяют определять границы изменения положений поверхностей-посредников.

Определение линий пересечения поверхностей вращения с помощью секущих плоскостей.

Вспомогательные плоскости частного положения применяются в тех случаях, если соответствующие оси поверхностей либо параллельны, либо перпендикулярны к тем или иным плоскостям проекций.

Пример 1. Дано: 2 цилиндра вращения, у которых оси **скрещиваются** в пространстве. Ось большого цилиндра перпендикулярна к W, малого - к H.

Нужно: Построить линию пересечения.

Отметим точки, не требующие специального построения. Введём плоскости-посредники P_1, P_2, P_3, P_4 $\parallel$V (так, чтобы оба цилиндра пересекались с ними по своим образующим).

На профильной плоскости проекций мы видим, что точки:

- 1 - низшая точка видимой части линии пересечения
- 2 - низшая точка невидимой части линии пересечения
- 3, 4 - высшие точки линии пересечения
- 5, 6 - точки, определяющие границу видимости на плоскости V.
- Вводя плоскости-посредники S$\parallel$H, найдём дополнительные точки сечения, например, 7 и 8.

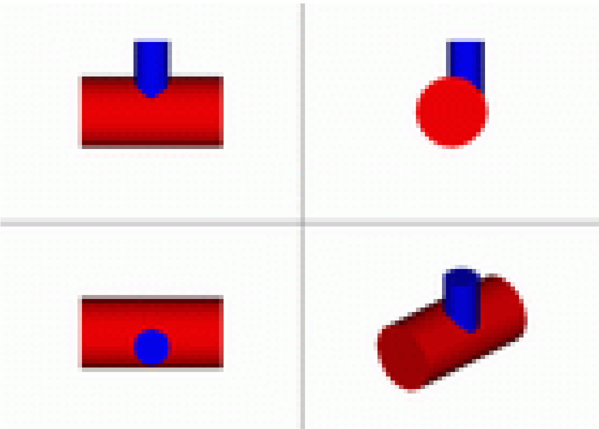


Рис.1

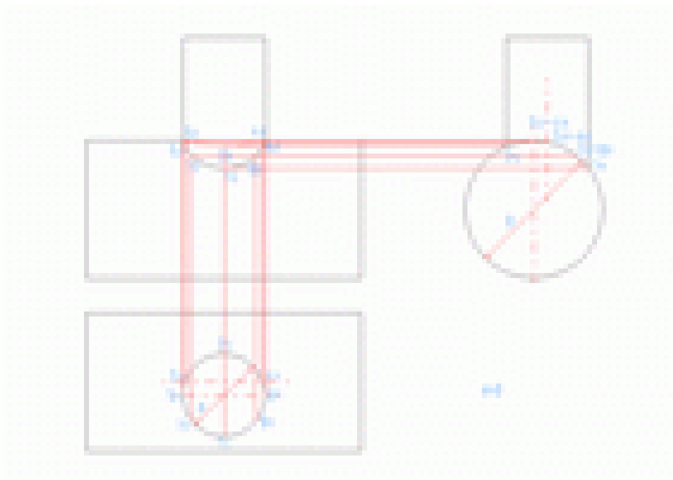


Рис.2

Если цилиндры разных диаметров, но оси **пересекаются,** то получим совпадение видимой и невидимой частей линии пересечения. d < D.

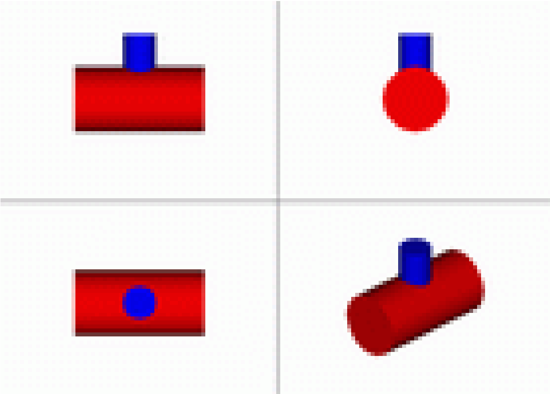


Рис.3

Рис.4

Если d=D, то фронтальная проекция линии пересечения представляет собой две пересекающиеся прямые, которые являются фронтальными проекциями плоских кривых - эллипсов.

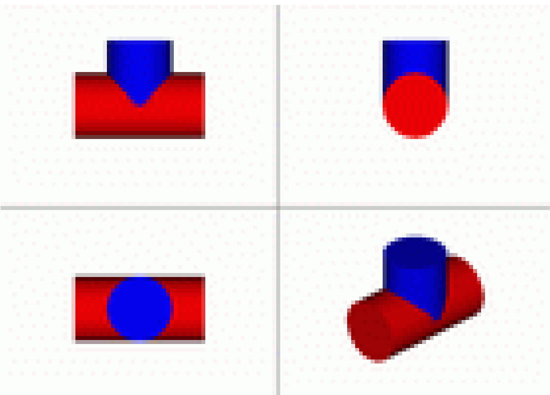


Рис.5

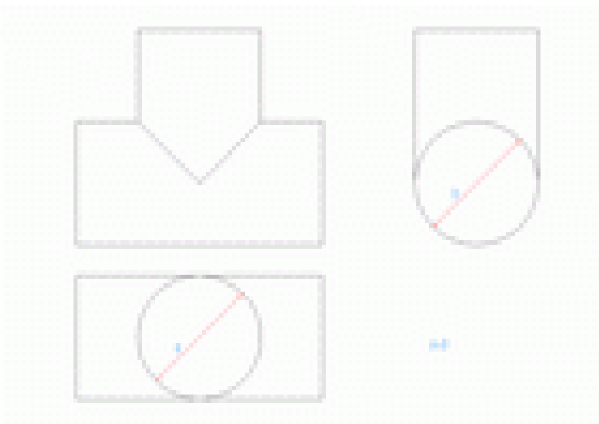


Рис.6

Пример 2. Дано: Прямой круговой усечённый конус, расположенный вертикально (на H) и цилиндр, расположенный горизонтально (на W). Оси цилиндра и конуса пересекаются в точке O.

Нужно: Построить их линию пересечения.

Как и в предыдущем примере, определяем сначала характерные точки линии пересечения:

- A и B - высшая и низшая точки
- C и D - точки, определяющие видимость линии пересечения на плоскости проекций H.
- Если взять в качестве вспомогательных плоскостей фронтальные или профильные плоскости, то они пересекут конус по гиперболам, а не по простым линиям, как требуется для построения. Следовательно, такие плоскости неудобны. Вспомогательные горизонтальные плоскости T пересекают конус по окружностям, а цилиндр - по образующим. Та и другая линия - простые. Искомые точки (E, F, K, L) находим на пересечении образующих с окружностями.

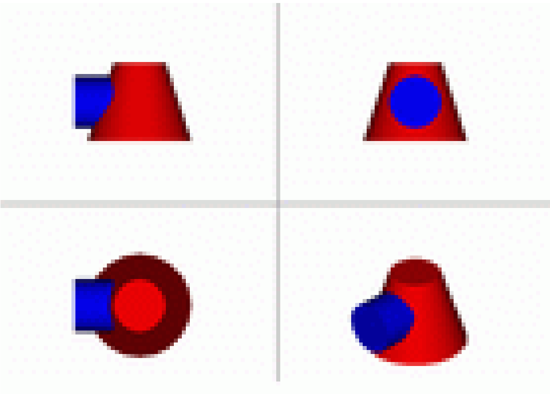


Рис.7

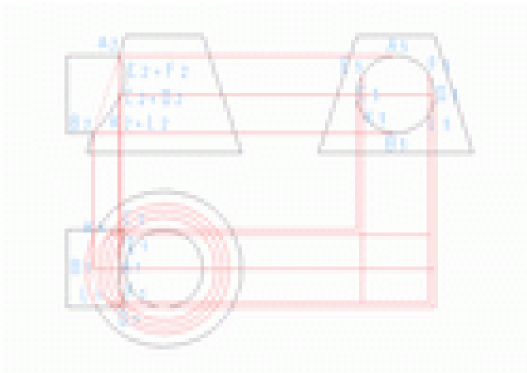


Рис.8

Определение линии пересечения поверхностей с помощью вспомогательных сферических поверхностей.

Вспомогательные сферические поверхности применяются, когда **оси поверхностей вращения** пересекаются друг с другом и параллельны какой-либо плоскости проекций.

Метод основывается на известном свойстве:
"Две любые соосные поверхности вращения пересекаются по окружностям, проходящим через точки пересечения меридианов поверхностей".

Плоскости окружностей сечения перпендикулярны оси поверхности вращения, а центры окружностей принадлежат этой оси. Поэтому, если оси поверхностей вращения параллельны плоскости проекции, то на эту плоскость окружности сечения проецируются в отрезки прямых, перпендикулярных проекциям оси вращения.

В качестве вспомогательной секущей поверхности вращения используют сферу, т.к. её просто вычертить.

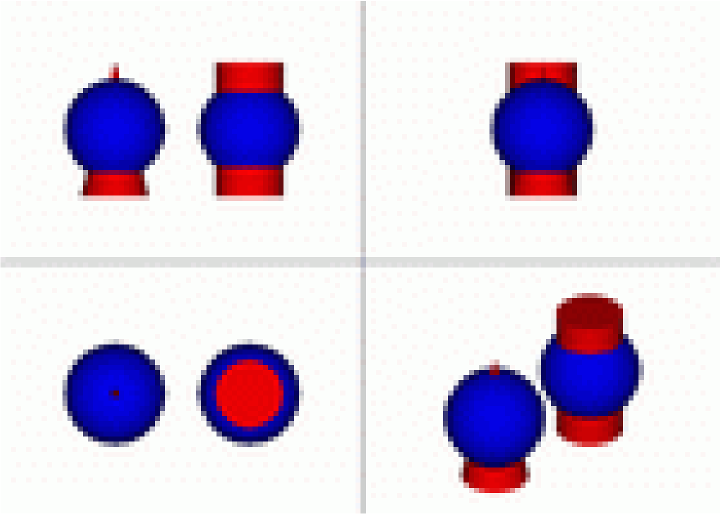


Рис.9

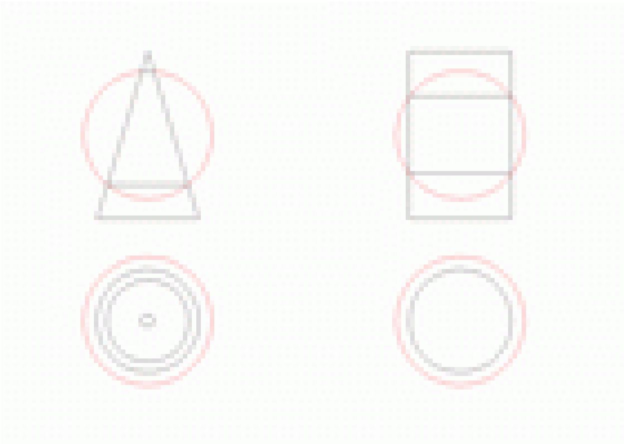


Рис.10

Пример. Дано: 2 поверхности вращения - цилиндр и конус, оси которых пересекаются и параллельны плоскости проекций V.

Нужно: Найти (построить) линию пересечения этих поверхностей вращения с помощью вспомогательных концентрических сфер.

Точки, наиболее удалённые от оснований малого конуса, найдём, вписав сферу в большой конус.

Проекции линии пересечения представляют собой кривые 2-го порядка. Это следует из теоремы: "Если пересекающиеся поверхности 2-го порядка имеют общую плоскость симметрии, то линии их пересечения проецируются на эту плоскость (или параллельную ей) в кривую 2-го порядка."

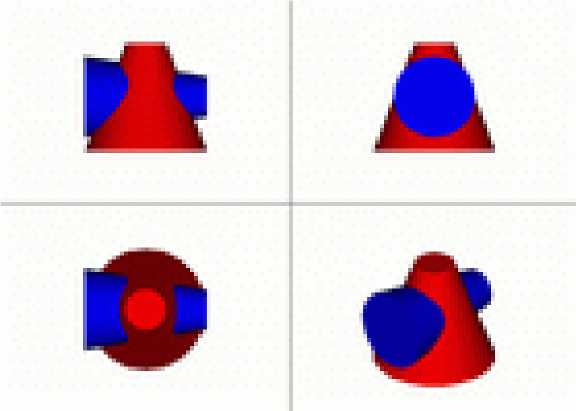


Рис.11

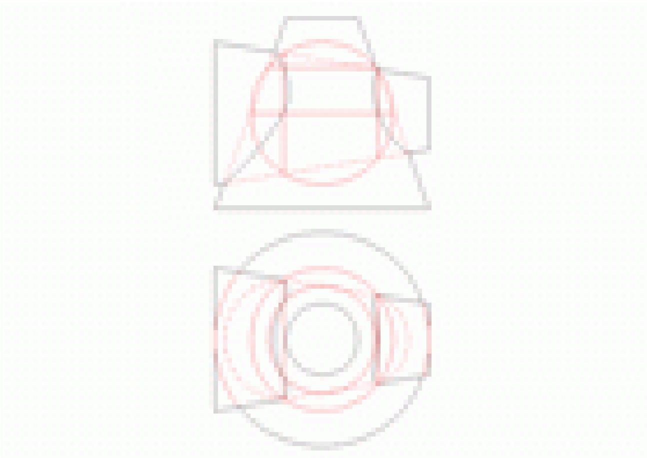


Рис.12

Лекции: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

6. Пересечение прямой с поверхностью.

Для нахождения точек встречи прямой с поверхностью любого типа, т.н. точек входа и выхода, поступают точно так же, как и при нахождении точек встречи прямой с плоскостью:

1. Прямую заключают в плоскость-посредник S: $m \subset S$
2. Определяют линию пересечения l плоскости S с поверхностью α: $l = S \cap \alpha$
3. Искомые точки входа и выхода прямой m определяют как результат пересечения её с линией пересечения l: $t_{1,2} = l \cap m$

Чтобы получить рациональное решение, следует использовать наиболее простой способ получения линии пересечения l. В качестве линии пересечения стремятся получить либо прямую, либо окружность. Этого можно достичь:

- путём выбора положения вспомогательной секущей плоскости;
- переводом прямой в частное положение.

В качестве вспомогательной может быть выбрана как плоскость частного, так и плоскость общего положения.

Пример 1. Дано: Наклонная трёхгранная призма, стоящая на плоскости H.

Нужно: Найти точки пересечения её поверхности с прямой m общего положения.

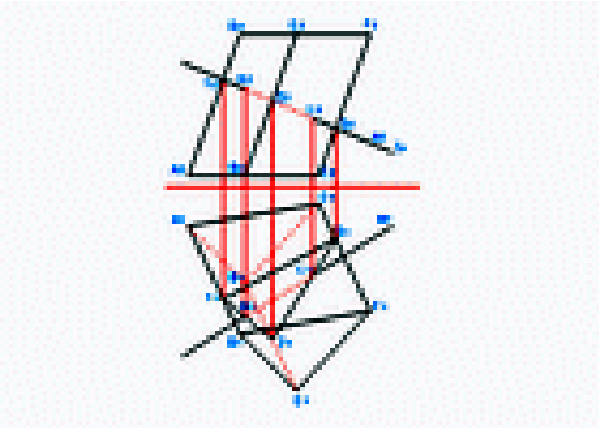


Рис.1

Пример 2. Дано: Прямой круговой конус.

Нужно: Построить точки пересечения поверхности конуса и прямой m общего положения.

Заключим прямую n в плоскость, проходящую через вершину S конуса. Для этого возьмём точку 1 на n $(S\in T)\wedge(m\subset T)$. Через S_2 проводим фронтальную проекцию горизонтали. Находим след прямой n. Через него проводим $T_H \parallel h$.

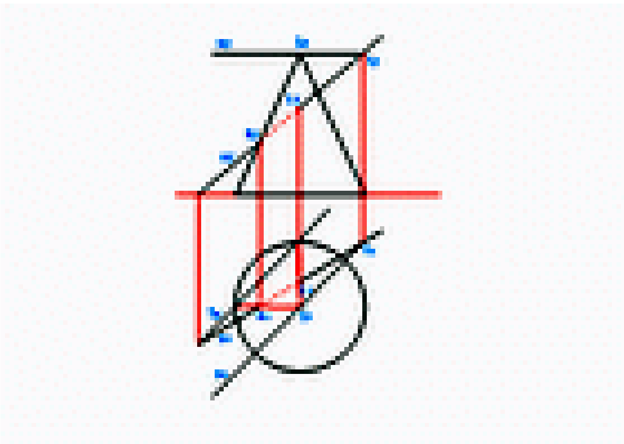


Рис.2

VII АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

1. Сущность аксонометрического проецирования. Виды проекций.

Рассмотренные в предыдущих лекциях ортогональные проекции широко применяются в технике при составлении чертежей. Это объясняется простотой построения ортогональных проекций с сохранением на них метрических характеристик оригинала.

С помощью чертежей, построенных в ортогональных проекциях, если их дополнить вспомогательными видами, разрезами и сечениями, можно получить представление о форме изображаемого предмета (как внешнего вида, так и внутреннего строения).

Наряду с отмеченными достоинствами метод ортогонального проецирования имеет существенный недостаток. Для того, чтобы получить представление о пространственном геометрическом образе, заданном его ортогональными проекциями, приходится одновременно рассматривать две, три, а иногда и больше проекций, что значительно затрудняет мысленное воспроизведение геометрической фигуры по её проекциям.

В ряде случаев необходимо, наряду с чертежом объекта, выполненном в ортогональных проекциях, иметь его наглядное изображение, состоящее только из одной проекции.

Способ проецирования, при котором заданная геометрическая фигура вместе с декартовой системой координат, к которой она отнесена в пространстве, параллельно проецируется на одну плоскость проекций так, что ни одна ось не проецируется в точку (а значит, сам предмет спроецируется в трёх измерениях), называется **аксонометрическим,** а полученное с его помощью изображение - **аксонометрической проекцией** или **аксонометрией.** Плоскость, на которую производится проецирование, называется **аксонометрической** или **картинной.**

Аксонометрическая проекция называется **прямоугольной,** если при параллельном проецировании проецирующие лучи перпендикулярны картинной плоскости ($\varphi=90^\circ$) и **косоугольной,** если лучи составляют с картинной плоскостью угол $0<\varphi<90^\circ$

Возьмём в пространстве координатные оси с единичными отрезками на них и спроецируем на картинную плоскость Q параллельно и в направлении проецирования S (т.е. с заданным углом проецирования φ).

Т.к. ни одна из координатных осей не параллельна картинной плоскости, то единичные отрезки на плоскости Q будут меньше единичных отрезков на декартовых осях.

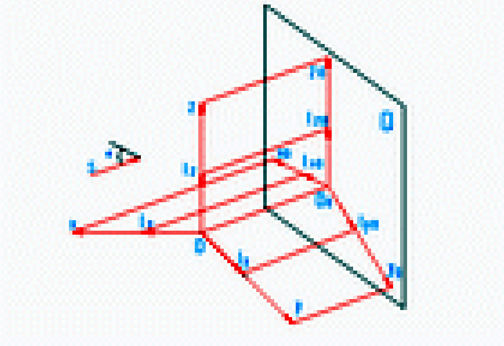


Рис.3

2. Прямоугольные аксонометрические проекции - изометрия и диметрия. Коэффициент искажения (вывод) и углы между осями.

Отношение единичных отрезков на аксонометрических осях к единичным отрезкам на координатных осях называется **коэффициентом искажения** по аксонометрическим осям.

$$k_x = \frac{l_{x_0}}{l_x} = p \quad k_y = \frac{l_{y_0}}{l_y} = q \quad k_z = \frac{l_{z_0}}{l_z} = r$$

Очевидно, принимая различное взаимное расположение декартовой системы координат и картинной плоскости и задавая разные направления проецирования, можно получить множество аксонометрических проекций, отличающихся друг от друга как направлением аксонометрических осей, так и величиной коэффициента искажения вдоль этих осей.

Справедливость этого утверждения была доказана немецким геометром Карлом Польке. Теорема Польке утверждает:

"Три отрезка произвольной длины, лежащие в одной плоскости и выходящие из одной точки под произвольными углами друг к другу, представляют параллельную проекцию трёх равных отрезков, отложенных на прямоугольных осях координат от начала."

На основании этой теоремы аксонометрические оси и коэффициенты искажения по ним могут выбираться произвольно. Если коэффициенты искажения приняты различными по всем трём осям, т.е. $p \neq q \neq r$, то эта аксонометрическая проекция называется **триметрической.** Если коэффициенты искажения одинаковы по двум осям, т.е. $p=r \neq q$, - **диметрической.** Если коэффициенты искажения равны между собой, т.е. $p=q=r$, - **изометрической.**

Стандартные аксонометрические проекции.

В машиностроении наибольшее распространение получили (см. ГОСТ 2317-69):

1. Прямоугольная изометрия: $p=r=q$, $\varphi=90^\circ$.
2. Прямоугольная диметрия: $p=r$, $q=0.5p$, $\varphi=90^\circ$.
3. Косоугольная фронтальная диметрия: $p=r$, $q=0.5p$, $\varphi<90^\circ$.

Прямоугольные аксонометрические проекции.

Для получения наглядного изображения необходимо, чтобы картинная плоскость Q не была параллельна ни одной из ортогональных осей проекций, поэтому плоскость Q пересекает ортогональные оси в точках X,Y,Z. Полученный ΔXYZ называется **треугольником следов.**

$[OO_0] \perp Q$; $[O_0X]$, $[O_0Y]$, $[O_0Z]$ - отрезки на аксонометрических осях.

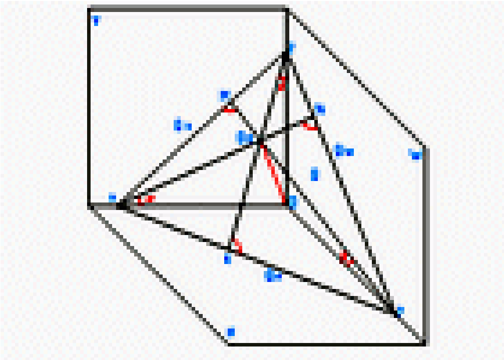


Рис.4

$$\frac{|O_0 x|}{|O x|} = \cos\alpha = p \quad \frac{|O_0 y|}{|O y|} = \cos\beta = q \quad \frac{|O_0 z|}{|O z|} = \cos\gamma = r \quad (1)$$

α_1, β_1 и γ_1 - дополнительные углы

По теореме косинусов:

- $\cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1=1$ или
- $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$
- $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$
- $1-\cos^2\alpha+1-\cos^2\beta+1-\cos^2\gamma=1$, т.е.
- $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2$

Таким образом, из соотношения 1 видно, что: $\mathbf{p^2+q^2+r^2=2}$

Для прямоугольной аксонометрии сумма квадратов коэффициентов искажения равна 2.

Установим численные значения коэффициентов искажения для прямоугольных изометрии и диметрии.

Для прямоугольной изометрии: $p=q=r$; $3p^2=2$; $p=q=r==0.82$

Для прямоугольной диметрии: $p=r$; $q=0.5p$; $2p^2+p^2/4=2$; $p==0.94$; $q=0.47$

Определение величин углов между осями стандартных аксонометрических проекций.

Изометрия:

Рассмотрим ΔXO_0O:

- $|O_0O|=|OX|\sin\alpha=|OZ|\sin\gamma=|OY|\sin\beta$; $\alpha=\beta=\gamma$
- $P=|O_0X|/|OX|$; $p=q=r$; $|O_0X|=|O_0Y|=|O_0Z|$

Следовательно, для прямоугольной изометрии треугольник следов равносторонний.

Докажем, что аксонометрические оси являются высотами в треугольнике следов.

Введём плоскость S: $([OO_0]\subset S)\wedge(S\perp Q)$; $S\perp H$; $[KO]=S_H$; $S_H\perp Q_H$; $[ZK]\perp[XY]$

Угол между высотами в равностороннем треугольнике равен 120° . Ось z принято располагать вертикально.

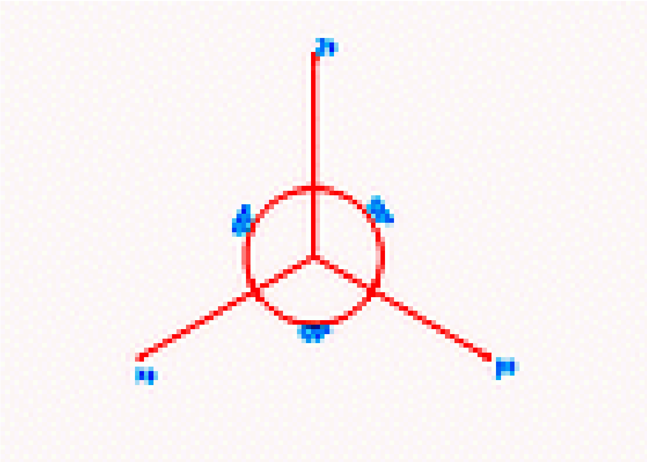


Рис.5

Прямоугольная диметрия:

p=r=2q; [XY]≡[YZ], следовательно, треугольник следов равнобедренный.

$|OZ|=|OX|=1$; $|XZ|=1.41$; $|XM|=0.71$; $|XO_0|=p=0.94$

$\sin(\Theta/2)=0.75$; $\Theta=97^\circ\ 10'$;

$\mathrm{tg}\ 7^\circ\ 10'=1/8$; $\mathrm{tg}\ 41^\circ\ 25'=7/8$

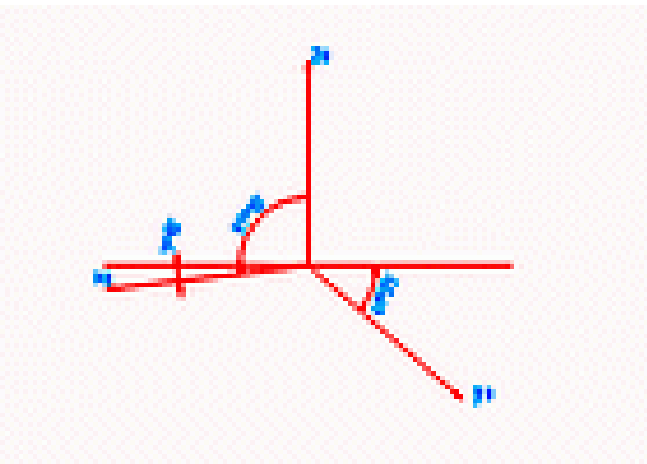


Рис.6

3. Прямоугольная аксонометрическая проекция окружности, лежащей в плоскости проекций (вывод).

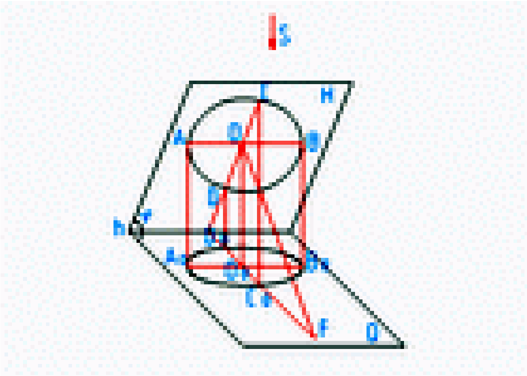
Прямоугольной аксонометрической проекцией окружности, лежащей в некоторой плоскости общего положения, составляющей $\angle\varphi$, не равный 0 и 90°, с картинной плоскостью Q, будет эллипс.

Большая ось этого эллипса есть проекция того диаметра окружности, который параллелен прямой пересечения плоскости P, в которой лежит окружность, и плоскости Q. Малая ось эллипса расположена перпендикулярно [MN].

$[MN]=Q\cap P$; Б.О.Э.$\parallel$[MN]; М.О.Э.$\perp$[MN].

В практике построения аксонометрических проекций деталей машин особенно часто встречаются проекции окружности, лежащей в плоскостях проекций H, V, W или им параллельных.

Аксонометрической проекцией окружности является эллипс. Для его построения необходимо найти оси, т.е. найти их размер и направление.

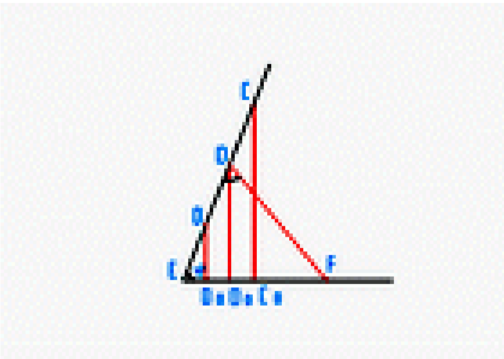


$[AB]\perp[CD]$; $S\perp Q$; $[A_0B_0]\parallel h$; $[C_0D_0]\perp h$; $[A_0B_0]=d$; $[C_0D_0]=d\cos\varphi$

Рис.7

Задача свелась к определению $\cos\varphi$ через соответствующий коэффициент искажения.

Рассмотрим эту же картинку, заданную двумя пересекающимися прямыми $(z \wedge z_0)$



М.О.Э.$=|C_0D_0|=CD\sin\alpha_0$; $\cos\alpha_0=r$

$$\text{М.О.Э.н} = d\sqrt{1-r^2} \qquad \text{М.О.Э.v} = d\sqrt{1-q^2} \qquad \text{М.О.Э.w} = d\sqrt{1-p^2}$$

Рис.8

Правило:
"Окружности, расположенные в плоскостях проекций или им параллельных, проецируются на картинную плоскость в виде эллипса, большая ось которого перпендикулярна к той аксонометрической оси, которая является проекцией ортогональной оси, перпендикулярной плоскости проецируемой окружности, а малая ось эллипса параллельна этой аксонометрической оси."

Построение аксонометрических проекций геометрических фигур. Прямоугольная изометрия. Построение аксонометрического куба.

Для наглядности при определении направлений осей эллипсов и их размеров впишем окружности в грани куба со стороной |d|, параллельные плоскостям проекций.

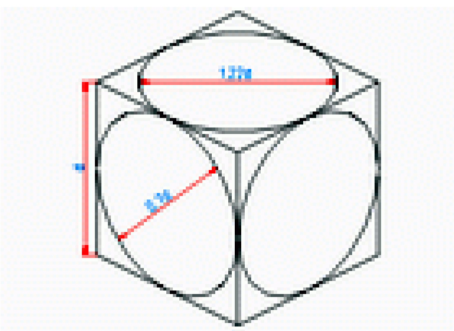


Рис.9

Т.к. плоскости проекций H, V и W в прямоугольной изометрии одинаково наклонны к картинной плоскости, коэффициенты искажения по осям одинаковы и эллипсы (аксонометрические проекции окружностей, расположенных в плоскостях проекций и им параллельным) будут конгруэнтны.

p = r = q = 0.82 (1)

Для простоты построений ГОСТ 2317-69 предлагает пользоваться приведёнными коэффициентами искажения:

p = r = q = 1 (2)

В этом случае получается не натуральная аксонометрическая проекция, а проекция, увеличенная в 1.22 раза.

В 1 случае Б.О.Э.=d; М.О.Э.=d$\sqrt{1-0.82^2}$=0.58d

Во 2 случае Б.О.Э.=1.22d; М.О.Э.=0.58*1.22d=0.7d

М.О.Э. по направлению совпадает со свободной аксонометрической осью, а Б.О.Э. ей перпендикулярна. Следовательно, направление осей эллипсов совпадает с направлением диагоналей граней куба.

Кроме точек на осях, отметим ещё 4 точки, принадлежащие эллипсу. Это точки, где вписанная окружность касается рёбер куба. Т.к. касание является инвариантом параллельного проецирования, эллипсы будут касаться куба в этих же точках.

Пример. Дано: Шестигранная пустотелая призма.

Нужно: Построить эту призму с разрезом в прямоугольной изометрии, применив приведённый коэффициент искажения.

Для перевода истинного размера в приведённый (увеличенный) пользуются **угловым масштабом.**

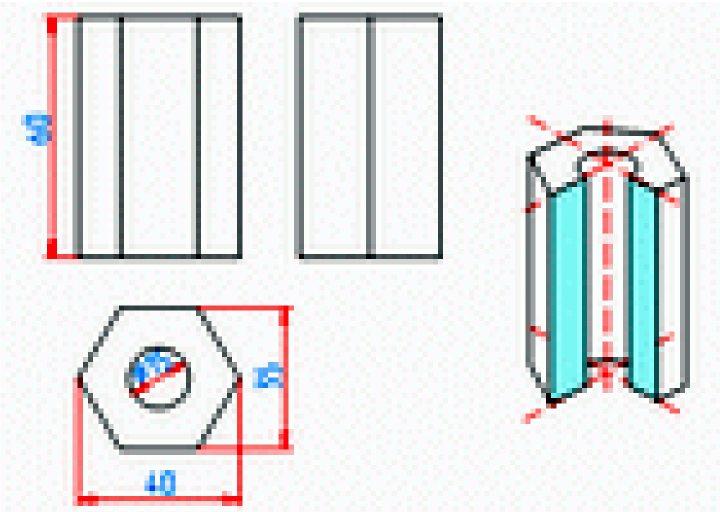


Рис.10

Прямоугольная диметрия.

В 1 случае p = r = 0.94; q = 0.5p = 0.47

Во 2 случае p = r = 1; q = 0.5 (в соответствии с ГОСТом).

Во втором случае аксонометрическая проекция получается увеличенной по сравнению с натуральной величиной в 1.06 раза.

Тогда:
Для 1 случая Б.О.Э.=d; М.О.Э.=0.33d для плоскостей H и W; М.О.Э.=0.88d для плоскости V.

Для 2 случая Б.О.Э.=1.06d; М.О.Э.=0.35d для плоскостей H и W; М.О.Э.=0.95d для плоскости V.

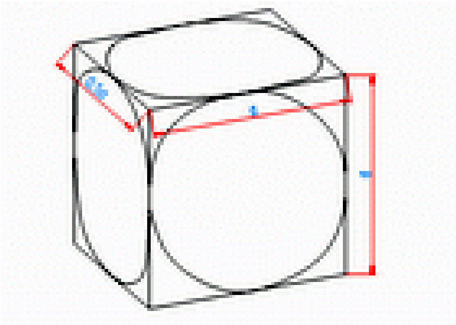


Рис.11

Т.к. p = r, в плоскостях H и W окружности конгруэнтны.

В прямоугольной диметрии грань, параллельная плоскости V, проецируется в виде ромба; грани, параллельные H и W, - в виде параллелограммов.

4. Косоугольная фронтальная диметрия.

$p = r = 1$; $q = 0.5$; $\varphi=45^{\circ}$

Б.О.Э.=1.06d; М.О.Э.=0.35d в плоскостях H и W; в плоскости V - окружность. Эллипсы в плоскостях H и W конгруэнтны.

Наряду с прямоугольными аксонометрическими системами на практике применяют некоторые косоугольные системы. Распространено применение аксонометрических проекций, когда аксонометрическая плоскость параллельна какой-либо ортогональной плоскости проекций. В машиностроительном черчении широкое применение получили косоугольные аксонометрии, полученные путём проецирования деталей на аксонометрическую плоскость, параллельную фронтальной плоскости проекций. Такая аксонометрическая система называется **косоугольной фронтальной аксонометрией.**

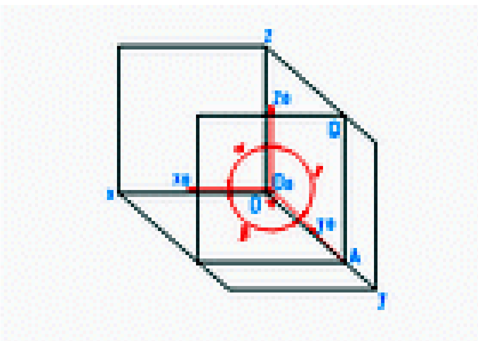


Рис.12

$\alpha=90^{\circ}$; $p=r=1.0$; $q=O_0A/OA$; $\angle O_0AO=90^{\circ}$, ΔOO_0A - прямоугольный.

Если вращать ΔOO_0A вокруг оси OA, то точка O_0 будет перемещаться по дуге окружности радиусом O_0A.

1. При повороте треугольника OO_0A вокруг ОА коэффициенты искажения не изменяются, а изменяются величины углов β и γ, следовательно, можно подобрать угол, удобный для проецирования.

$$\beta=\gamma=135^\circ$$

2. Перемещая положение точки O_0 в направлении O_0y_0, можно добиться того, что коэффициент искажения q будет равен 1.0 или 0.5. При этом изменяется угол φ, но углы β и γ остаются постоянными.

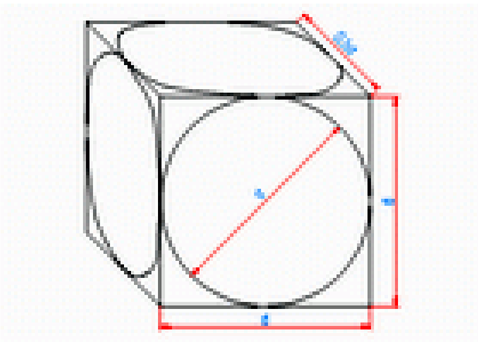
   Таким образом, подобрав удобные углы $\beta=\gamma=135^\circ$, и выбрав удобный коэффициент искажения по оси y_0 (1.0 или 0.5), мы получим:

   - косоугольную фронтальную изометрию, если:
     $p = q = r = 1.0$; $\beta=\gamma=135^\circ$; $\alpha=90^\circ$.
   - косоугольную фронтальную диметрию, если:
     $p = r = 1.0$; $q = 0.5$; $\beta=\gamma=135^\circ$; $\alpha=90^\circ$; $\varphi=56^\circ$

     Этот вид аксонометрии часто применяется в машиностроительном черчении. Раньше его называли также **кабинетной проекцией.**

Построение аксонометрического куба.

В косоугольной фронтальной диметрии грань, параллельная плоскости V, проецируется в виде квадрата без искажения. Грани, параллельные плоскостям проекций H и W, проецируются в виде параллелограммов.



$p = r = 1.0$; $q = 0.5$; $\beta=\gamma=135^\circ$; $\alpha=90^\circ$
Б.О.Э.=1.06d; М.О.Э.=0.35d в плоскостях H и W; в плоскости V - окружность. Эллипсы в плоскостях H и W конгруэнтны.

Рис.13

Пример. Дано: Цилиндрическая втулка в ортогональных проекциях.

Нужно: Построить косоугольную фронтальную диметрию втулки, выполнить разрез.

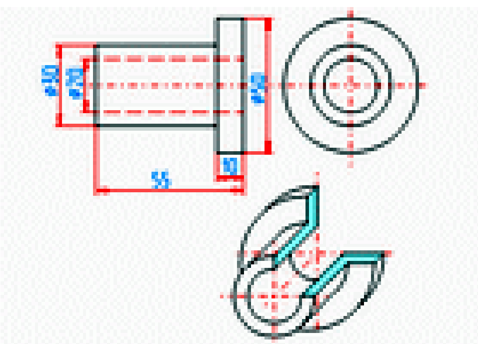


Рис.14