Введение в курс.

Курс лекций **Начертательная геометрия** в которой рассматриваются следующие основные вопросы :

1) Построение изображений или чертежей предметов;
2) Решение геометрических задач в пространстве при помощи чертежей на плоскости.

Начертательная геометрия является лучшим средством развития у человека пространственного воображения, без которого не мыслимо инженерное творчество.

Основы этой науки заложены были при разработке первых чертежей. Дошедшие до нас чертежи и рисунки Древней Руси говорят о том, что при их создании применялись методы близкие к геометрическим методам. Древние памятники инженерной графики свидетельствуют, что графическое искусство на Руси было на высоком уровне.

Научное обоснование методов начертательной геометрии произошло в семнадцатом веке в связи с начавшемся бурным развитием в Европе промышленности. Основоположником считается видный французский ученый и политический деятель Гаспар Монж (1746 - 1818 гг.). Его учение о ортогональном методе проецированная сохранилось до нашего времени .

В России начертательную геометрию впервые стали изучать с 1810 года в Институте корпуса инженеров путей сообщения (С-Петербург), а с 1830 года стали преподавать во всех высших учебных заведениях России.

Первым русским ученым издавшим труд “Основания начертательной геометрии “ в 1821 году был профессор Р.А. Севастьянов.

Для изучения Начертательной геометрии в Московском автомобильно-дорожном институте студентами специальности .... можно рекомендовать следующие учебники и учебные пособия :

1) Кузнецов Н.С. Начертательная геометрия. М. “Высшая школа”,1969, 496 с.
2) Рыжов Н.Н. Главные позиционные задачи . Методические указания по курсу начертательной геометрии. М., МАДИ., 32 с.
3) Н.Н. Рыжов, О.А. Оганесов Задание поверхностей на комплексном чертеже (Методические указания к выполнению самостоятельной работы №1), МАДИ, Москва., 1990, 34 с.
4) Фролов С.А. Начертательная геометрия. М. “Машиностроение”, 1978, 240 с.
5) Луговой М.А., Ляшкевич П.А. , Оганесов О.А. , Фамин Л.Б. Тетрадь по начертательной геометрии для студентов специальностей ДМ, КМ, ТВ, ТУ, АП, ОД. М. 1995 г.

Обозначения и символика. Знакокодовая система обозначений.

Для обозначения геометрических фигур, их проекций , для краткой записи геометрических предложений , алгоритмов решения задач используется *геометрический язык* составленный из символов принятых в курсе математики. Этот язык будет изучаться последовательно по мере изложения данного курса начертательной геометрии. Литература № 4 , с. 6 - 11. Знакокодовая система обозначений приведена в приложении 1 к данному конспекту лекций.

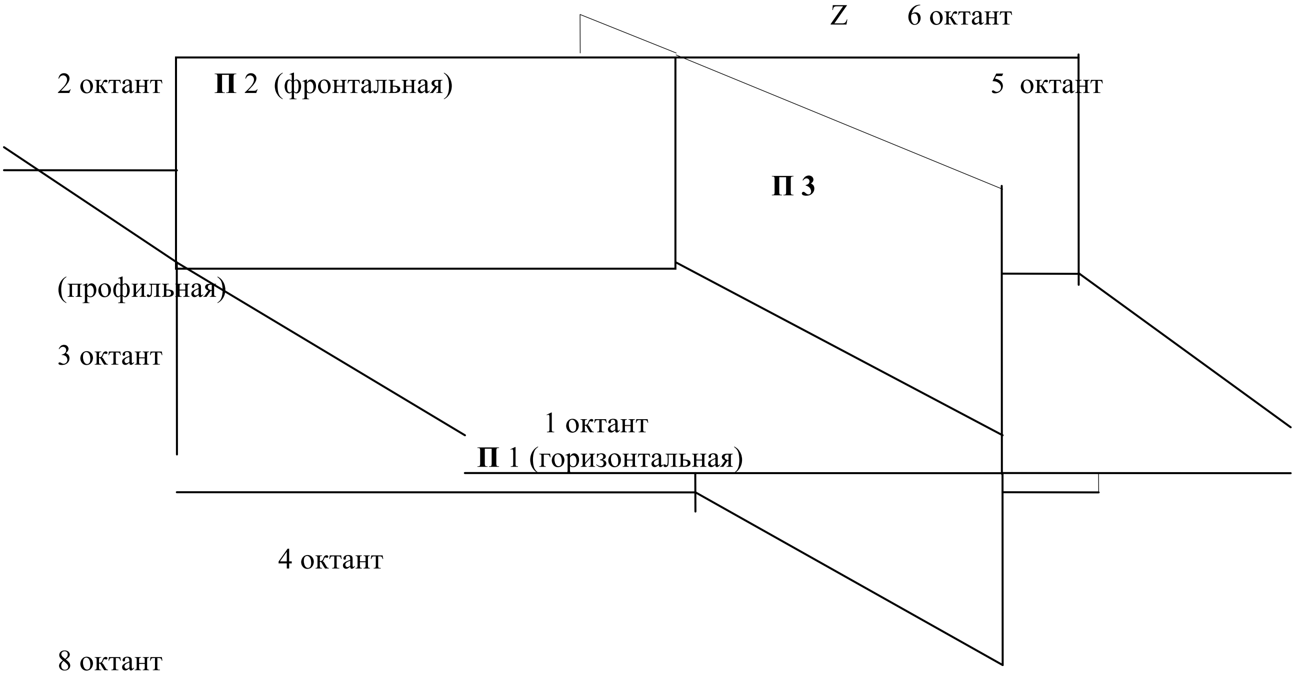
Метод проецирования .

Исходя из различных методов изображения начертательная геометрия содержит четыре основных раздела :

- ортогональные проекции;
- проекции с числовыми отметками;
- аксонометрические проекции;
- перспективные проекции.

Ортогональный метод проецирования.

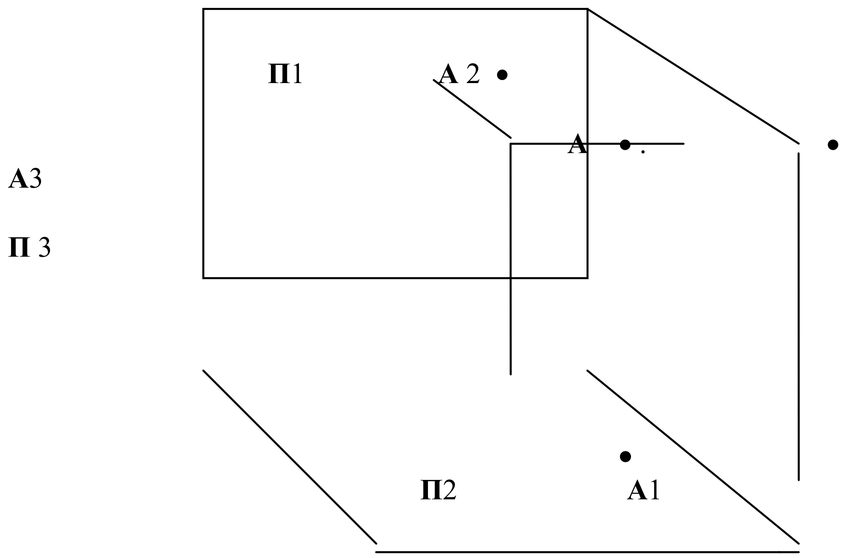
Метод проецирования заключается в том, что любая точка пространства может быть спроецирована с помощью проецирующих лучей на любую поверхность. Ортогональное проецирование это такой метод когда проецирующие лучи *параллельны между собой и перпендикулярны к плоскости проекций.*
Рассмотрим это на примере проекции точки на плоскость, но предварительно зададимся плоскостями проекций : *горизонтальной* **П** 1, *фронтальной* **П** 2 и *профильной* **П** 3.



Линия пересечения горизонтальной П1 и фронтальной П2 плоскостей обозначается **X** и называется осью *абсцисс*, соответственно линия пересечения горизонтальной П1 и профильной П3 плоскостей проекций **- Y** ось *ординат* , плоскостей фронтальной П2 и профильной П3 **Z** - ось *аппликат*.
Плоскости проекций делят пространство на восемь частей - <u>*октантов.*</u>
Положительными направлениями осей координат считаются : для оси OX влево от начала координат, для оси OY в сторону наблюдателя, для оси OZ вверх. Противоположные направления координатных осей считаются отрицательными.

Пусть некоторая точка **А,** не принадлежащая плоскостям проекций ($A \not\subset П1$ ^ $A \not\subset П2$), будет являться объектом проецирования . Построим проекцию точки **А** на плоскость П1 при помощи *проецирующей прямой* проходящей через точку **А** и перпендикулярной плоскости П1. Проецирующая прямая пересечет плоскость П1 в точке А1. Точка А1 - это проекция точки **А** на плоскость П1.
Аналогично построим проекцию точки **А** на плоскость П2 и П3. Это точки А2 и А3.

Точку А1 будем называть <u>*горизонтальной проекцией*</u> точки А, точку А2 - <u>*фронтальной проекцией*</u> точки А, а А3 - <u>*профильной проекцией*</u> точки А.



Прямые АА1, АА2, АА3 называют проецирующими прямыми :
АА1 - _горизонтально проецирующей прямой_ (она проецирует точку А на горизонтальную плоскость), АА2 - _фронтально проецирующей прямой_, а АА3 - _профильно проецирующей прямой_.

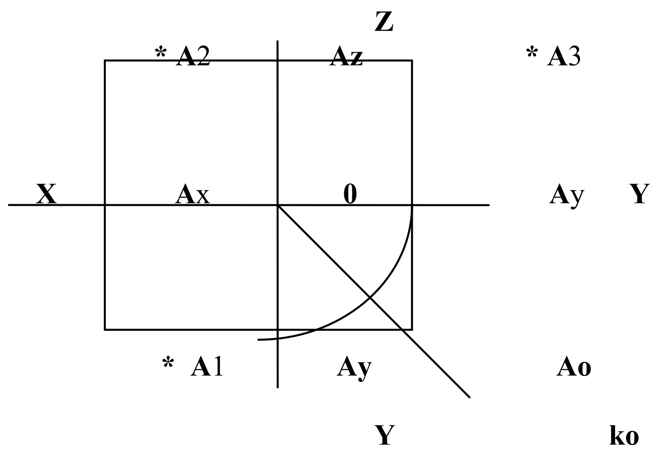
Построенная нами система взаимно перпендикулярных плоскостей проекций с проекциями точки на них *является обратимой*, позволяющей определить положение точки А в пространстве, но *не является чертежом*.

Для получения _плоского комплексного чертежа_ преобразуем пространственное изображение совместив плоскости проекций.

Повернем горизонтальную плоскость проекций П1 вокруг оси ОХ на 90 градусов таким образом, чтобы передняя часть плоскости совместившись с плоскостью П2 заняла положение ниже оси ОХ, а задняя часть плоскости П2 высше оси ОХ.

При этом горизонтальная проекция точки А1 вместе с плоскостью опустится вниз и расположится на одном перпендикуляре к оси ОХ с фронтальной проекцией А2.

Профильная проекция А3 будет вращаться вместе с профильной плоскостью П3 вокруг оси OZ и займет положение на перпендикуляре к оси OZ. Построим все это на рисунке который будем назвать *эпюром (от фр. глагола исправлять, улучшать рисунок) или комплексным чертежом.*



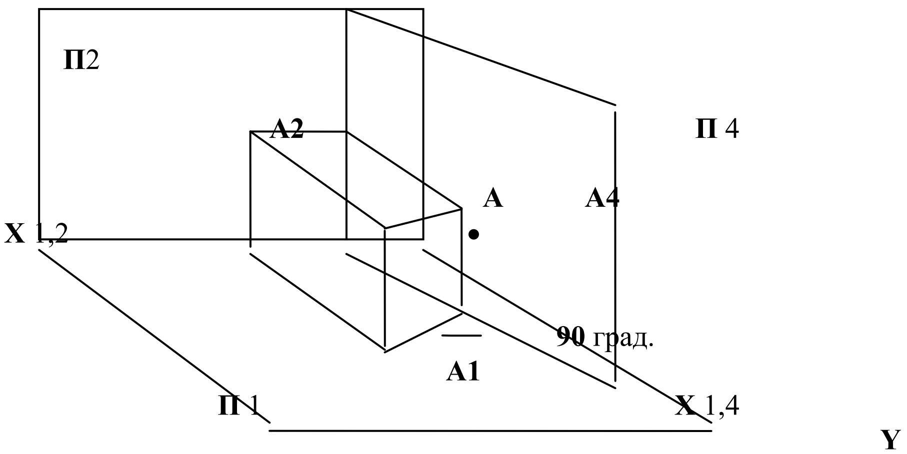
Биссектрису ОАо называют _постоянной прямой **k**o эпюра Монжа._

Эта биссектриса позволяет установить связь между горизонтальной и профильными проекциями точки. Эта связь может быть установлена с помощью дуги окружности с центром в точке пересечения координатных осей.
Таким образом все проекции точки на комплексном чертеже находятся в *проекционной связи.*
Прямые соединяющие проекции точки меду собой называются <u>*линиями проекционной связи (A1,A2 или A2,A3).*</u>

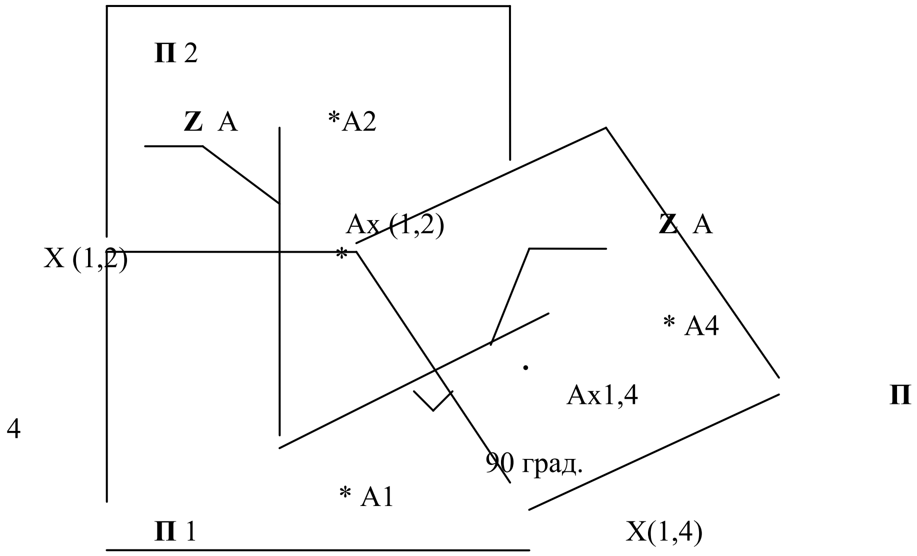
Мы рассмотрели как зафиксировать положение точки в пространстве и отобразить это на комплексном чертеже. Точка относится к нульмерным геометрическим образам, не имеет измерений и не является материальной. На следующей лекции мы рассмотрим одномерные геометрические образы к которым относятся *линии.*
Линия имеет измерение вдоль, но не имеет толщины. При измерении длинны линии нам иногда потребуется вводить дополнительную плоскость проекций (в дополнение к уже рассмотренным : горизонтальной П1, фронтальной П2, профильной П3).

Ведение новой плоскости проекций

Новую плоскость проекций располагают перпендикулярно к одной из заданных плоскостей. Введем новую плоскость проекций П4 перпендикулярную горизонтальной плоскости проекций П1 и не перпендикулярную к фронтальной плоскости проекций П2.



Новая ось проекций X 1,4 получена при пересечении горизонтальной плоскости П1 и новой плоскости П4. Проекция A4 получена методом ортогонального проецирования. Теперь развернем наш рисунок в комплексный чертеж вращая плоскость П1 вокруг оси X1,2 до совмещения с плоскостью П2. При этом плоскость П4 вращается *вместе с* плоскостью П1.

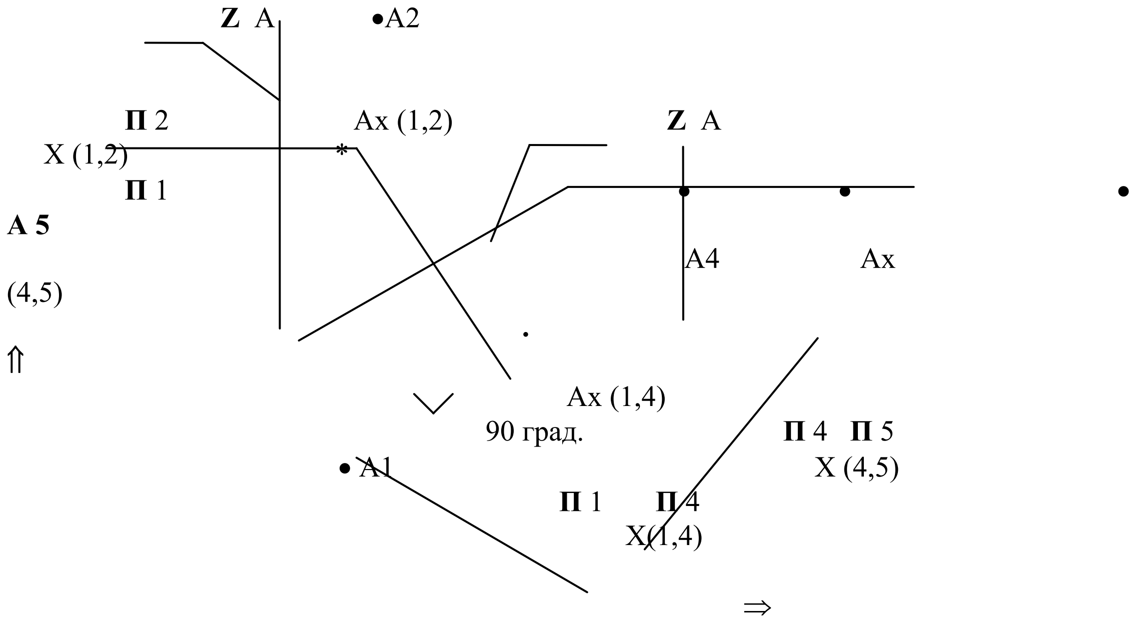


Новая ось проекций X (1,4) определяет новое направление линии проекционной связи.
Для построения на чертеже новой проекции точки А 4 необходимо через горизонтальную проекцию точки А 1 провести линию проекционной связи перпендикулярно оси X (1,4) и от оси X (1,4) вдоль линии проекционной связи отложить расстояние , равное расстоянию от точки **А** до плоскости **П 1.** Это расстояние измеряем на фронтальной плоскости проекций от оси X(1,2) до проекции точки А 2.

Запишем : |A, A1| = |A x(1,2), A2| = |A x (1,4), A 4|

Такое построение нового изображения по двум исходным называется преобразованием комплексного чертежа. В данном случае преобразование было проведено *способом введения новой плоскости проекций*.

Проведем еще одно преобразование чертежа при этом записав алгоритм построения с помощью знакокодовой системы обозначений. Для этого воспользуемся тем же чертежом удалив только линии символически изображавшие плоскости проекций . Здесь и в дальнейшем договоримся - то что высше оси X (1,2) фронтальная плоскость и все, что ей принадлежит , то что ниже оси X (1,2) горизонтальная плоскость и все, что принадлежит ей. Аналогично, ниже оси X (1,4) горизонтальная плоскость, а высше новая плоскость **П** 4.



Зададим еще одну плоскость проекций П 5 перпендикулярную плоскости П 4.
На чертеже новое поле проекций задаст новая ось Х (4,5).
Чтобы получить проекцию точки А 5 на плоскости **П** 5 выполним следующие построения:

1) $\lceil$ (A 4, A 5) $\supset$ A 4 ; (A4, A 5) $\perp$ X (4,5) .

2) $\lceil$ A 5 $\subset$ (A 4, A5); $|$ A x (4,5), A 5 $|$ = $|$ A x (1,4) , A 1 $|$.

Расшифруем эту запись : 1) Построить прямую определяемую точками А 4, А 5 проходящую через точку А 4 ; прямая А 4 , А 5 перпендикулярна оси Х (4 ,5).
2) Построить точку А 5 принадлежащую прямой А 4, А 5 ; длина отрезка А х (4,5), А 5 равна длине отрезка А х (1,4), А 1.
Произведем эти построения на чертеже.

В качестве дополнительной литературы предлагаю использовать учебное пособие М. А. Луговой Точка, прямая, плоскость. М. МАДИ, 1995 г.

Самостоятельно в тетради по начертательной геометрии (Л. 5) решить задачи с 1 по 5 .

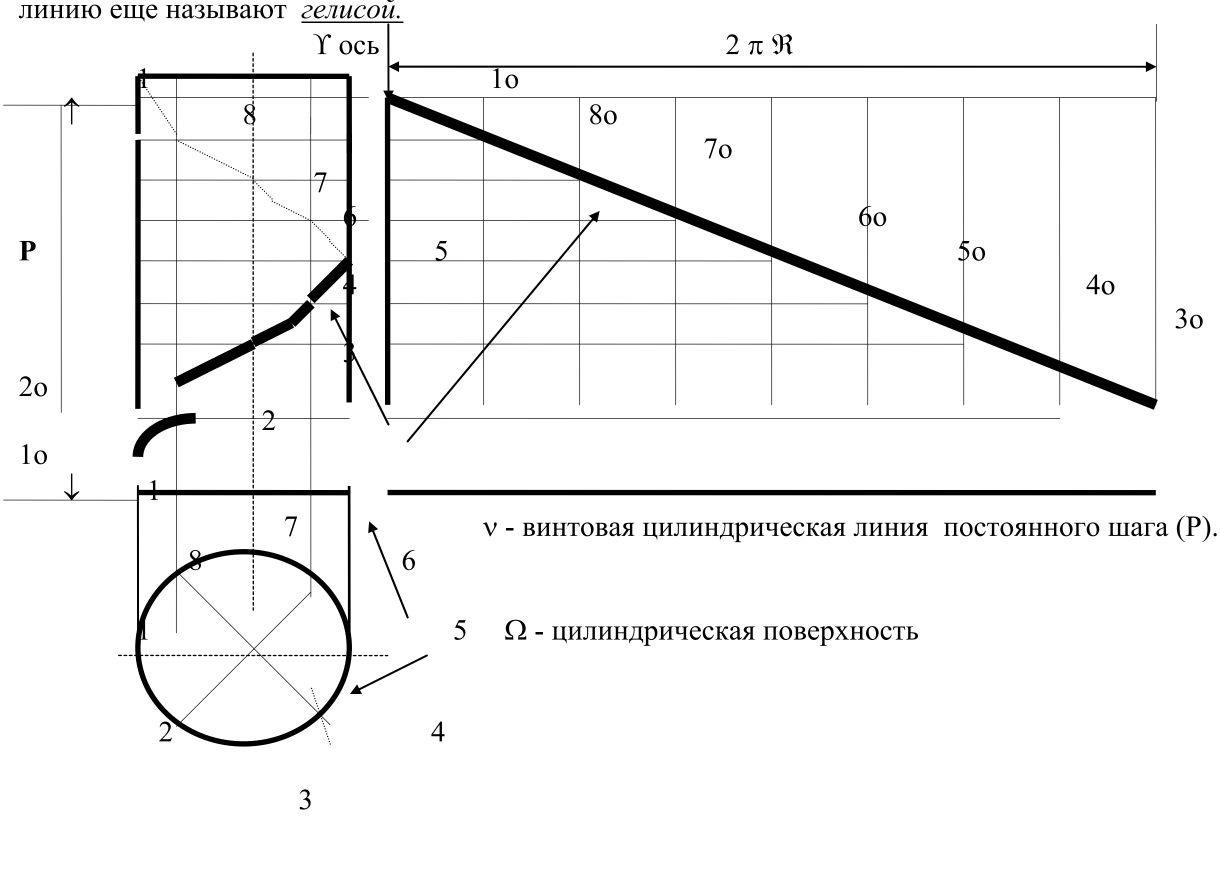
Линия .

Пространственные кривые лини

В начертательной геометрии кривую линию часто рассматривают как траекторию описанную движущейся точкой. Кривая линия может быть *плоской или пространственной.* Все точки плоской кривой принадлежат некоторой плоскости. Кривую не лежащую всеми точками в одной плоскости называют *пространственной.*

Из пространственных кривых в технике находят широкое применение винтовые линии. Винтовую линию можно рассматривать как результат перемещения точки по поверхности вращения .

Если на поверхности прямого кругового цилиндра карандашом зафиксировать точку , а затем начать вращать цилиндр, одновременно равномерно перемещая карандаш вдоль оси цилиндра , то острие карандаша опишет пространственную кривую называемую *цилиндрической винтовой линией*. Такую цилиндрическую винтовую линию еще называют *гелисой.*



Ось цилиндрической поверхности будет осью винтовой линии, а радиус поверхности радиусом винтовой линии. Величину P перемещения точки в направлении оси , соответствующему одному ее обороту вокруг оси, называют ***шагом винтовой линии*.**

Для построения проекции **винтовой линии** начнем с построения проекций прямого кругового цилиндра. Окружность основания цилиндра представляет собой горизонтальную проекцию гелисы. Разделим эту окружность на 8 равных частей. На такое же число частей (8) делим шаг P на фронтальной проекции. Из точек деления окружности проводим линии связи, а через соответствующие точки деления шага горизонтальные прямые.

Соединив точки пересечения этих прямых плавной кривой , получим фронтальную проекцию винтовой линии. Цилиндрические винтовые линии разделяются на правые и левые.

По часовой стрелке - правого хода, против - левого.

Справа построена развертка гелисы. Цилиндрическая винтовая линия вполне определяется радиусом, шагом и ходом.

(См. Л. с.44-45).

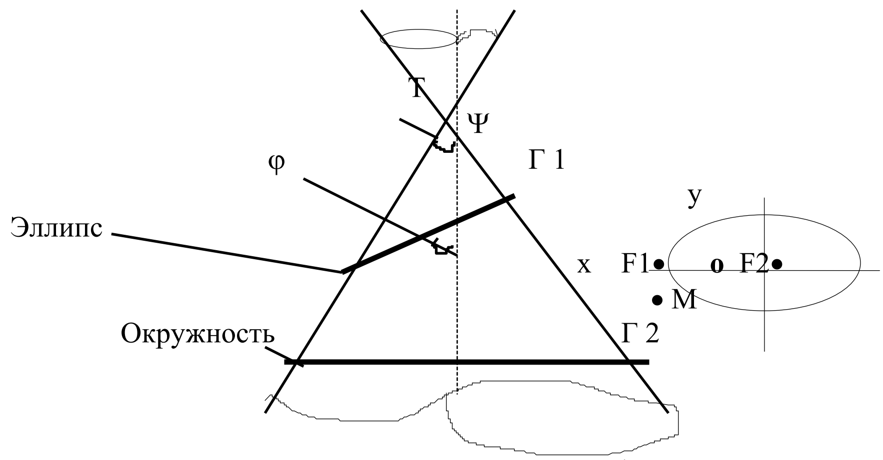
Плоские кривые линии.

Среди плоских алгебраических кривых особо следует отметить кривые второго порядка.

Эти кривые иногда рассматривают как плоские сечения поверхностей - “конические сечения”.

Рассмотрим три простейших канонических формы : *эллипс, гиперболу и параболу.*

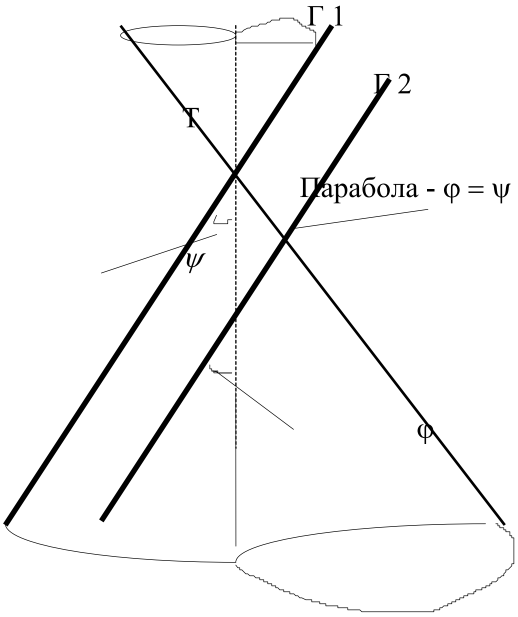
Зададимся конической поверхностью.



1. Эллипс - $\varphi > \psi$ 2. Окружность - $\varphi = 90$ град.

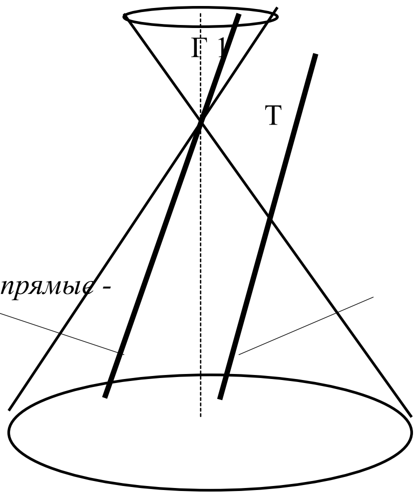
Эллипс геометрическое место точек M , сумма расстояний которых до двух заданных точек (F1, F2) называемых фокусами, есть величина постоянная.

Рассечем коническую поверхность плоскостью Г2 параллельной образующей конуса и не проходящей через вершину T:



<u>Двойная прямая</u>
- Г 1 ⊃ Т

Для получения гиперболы коническую поверхность необходимо рассечь плоскостью Г2 не проходящей через вершину конуса и не параллельную его образующей.



Г 2 ____________

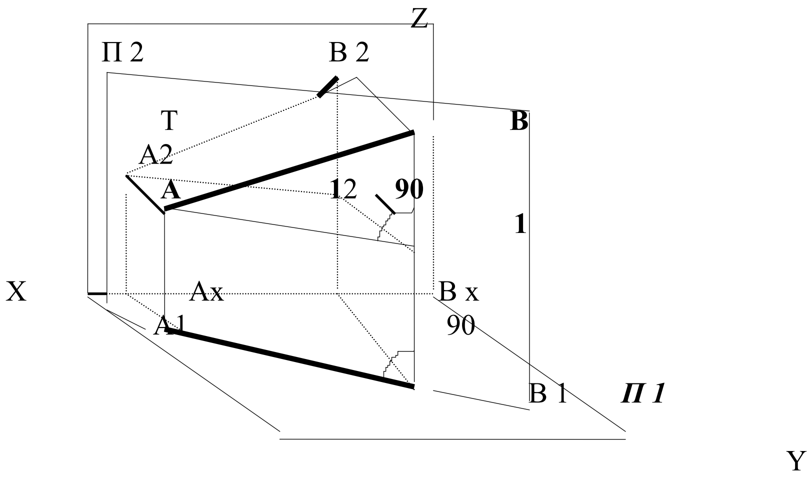
Две пересекающиеся прямые -
Г 1 ⊃ Т.

Гипербола - __
φ < ψ.

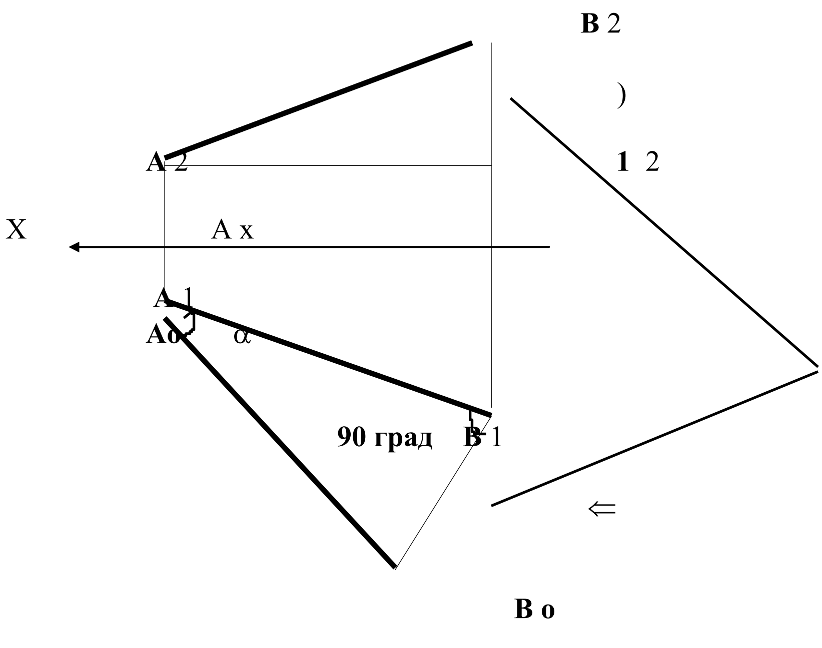
<u>См. Л. с. 128 - 129.</u>

Прямая линия и ее задание на комплексном чертеже.

Прямая линия - это простейший представитель семейства линий.
На комплексном чертеже прямая линия может быть задана непосредственно своими проекциями, проекциями двух точек принадлежащих прямой или следами.
При ортогональном проецировании на плоскость, не перпендикулярную ей, прямая проецируется в прямую линию.
Чтобы спроецировать отрезок прямой линии AB на плоскость, из крайних точек отрезка опускают перпендикуляры на плоскость проекций и полученные проекции точек A1 и B 1 соединяют прямой котоpяй и будет проекцией данного отрезка.



Одна проекция прямой не определяет ее положение в пространстве, так как может соответствовать множеству прямых расположенных в этой же проецирующей плоскости .
Необходимо иметь не менее двух проекций отрезка прямой, чтобы определить положение прямой в пространстве.
Отрезок АВ наклонен ко всем плоскостям проекций, поэтому проекции отрезка будут меньше его самого. Прямая наклоненная ко всем плоскостям проекций , называется **прямой общего положения**.
Рассмотрим прямоугольный треугольник Δ АВ1. Горизонтальная проекция |А 1, В 1| будет равна катету А,1 этого треугольника.
Чтобы определить величину второго катета В, 1 посмотрим на фронтальную плоскость проекций. Проекция на фронтальную плоскость **В** 2, **1** 2 равна *натуральной величине* второго катета В, 1. Мы в этом дополнительно убедимся когда рассмотрим частное положение прямых в пространстве. Сейчас забегая вперед, я хочу обратить ваше внимание, что катет В,1 перпендикулярен горизонтальной плоскости проекций и параллелен фронтальной плоскости проекций.
Таким образом, зная два катета прямоугольного треугольника, мы можем найти его гипотенузу. Имея комплексный чертеж прямой общего пложения, где ни одна из проекций отрезка этой прямой не равна натуральной величине отрезка , мы всё же можем найти его натуральную величину.



Если мы имеем чертеж с изображением отрезка в двух проекциях, то имеются все геометрические элементы для определения натуральной величины отрезка. Восстановим перпендикуляр к проекции A 1B 1 и на нем отложим расстояние равное B 2 1 2. Полученную точку B о соединим с горизонтальной проекцией A 1 точки A. *Полученная гипотенуза будет натуральной величиной отрезка прямой AB, а угол α будет натуральным углом наклона данного отрезка к горизонтальной плоскости проекций*.

Без нахождения натуральной длинны отрезка нельзя найти угол наклона прямой к плоскости проекций . Поэтому если требуется найти углы наклона прямой ко всем плоскостям проекций (П 1, П2, П 3) , то необходимо определить натуральную длину отрезка на всех плоскостях проекций.

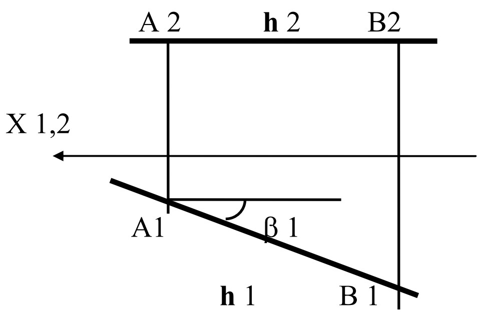
При подготовке к практическому занятию решите этим методом задачу 9 из Тетради.

Рассмотрим частные случаи расположения прямой в пространстве относительно плоскостей проекций.

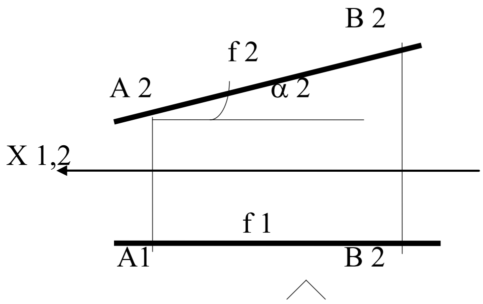
Прямые уровня.

Это прямые параллельные плоскостям проекций.
Пряма параллельная горизонтальной плоскости проекций называется горизонтальной прямой уровня или *горизонталью* и обозначается h.
Все точки этой прямой находятся на одинаковом расстоянии от горизонтальной плоскости проекций (на одном уровне) и поэтому ее легко узнать на чертеже - фронтальная проекция этой прямой всегда параллельна оси X 1,2 , горизонтальная проекция отрезка этой прямой равна его натуральной величине.

| A 1B 1| = | A ,B| , |β 1| =| β| ; -угол наклона горизонтали к плоскости П 2 (фронтальной плоскости).



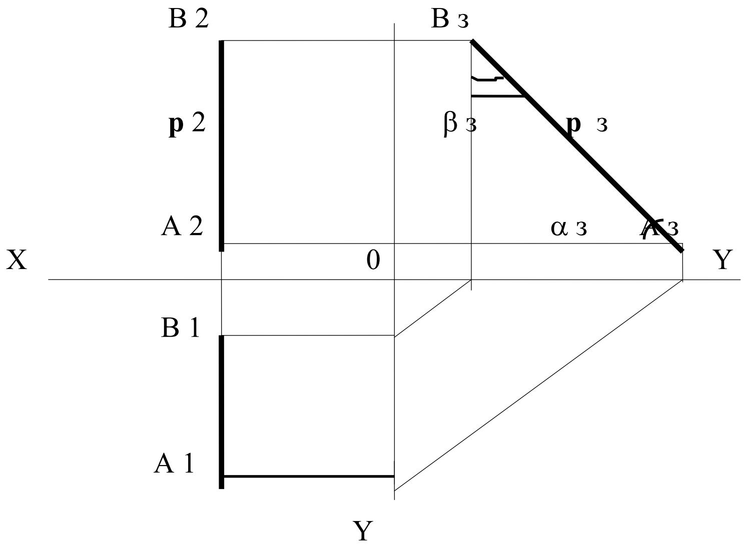
Прямая, параллельная фронтальной плоскости проекций , называется фронтальной прямой уровня или *фронталью* (f). Горизонтальная проекция фронтали параллельна оси проекций X 1,2 . Все точки фронтали находятся на одинаковом расстоянии от фронтальной плоскости проекций . Длинна фронтальной проекции отрезка фронтали равна его натуральной величине, а угол наклона фронтали к плоскости П 1 равен фронтальной проекции этого угла:



$|A2, B2| = |A, B|$, а угол $\alpha = |f, П1| = |\alpha\ 2|$

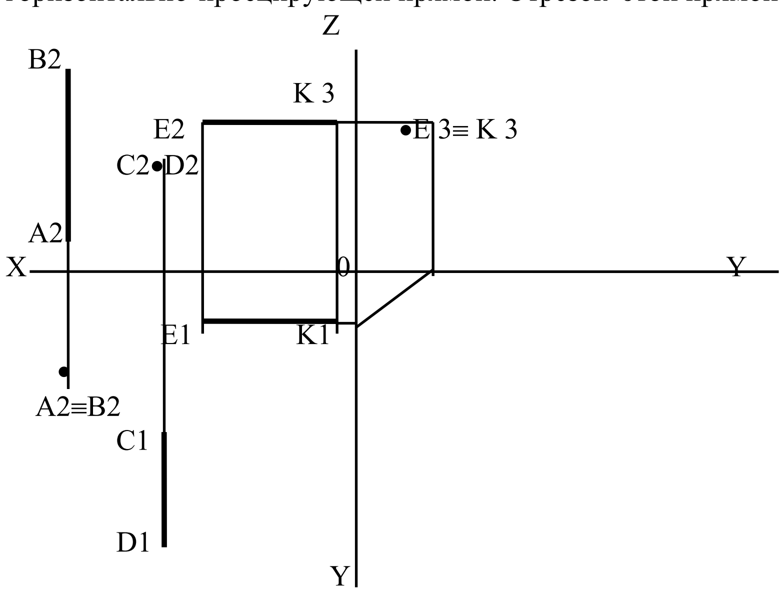
Прямая параллельная профильной плоскости проекций , называется профильной прямой уровня. Горизонтальная (p 1) и фронтальная (p 2) проекции профильной прямой перпендикулярны оси проекций X 1,2. Длина профильной проекции отрезка прямой равна его натуральной величине. Углы наклона к плоскостям проекций профильной проекции равны их натуральной величине.

$|A з , B з| = |A,B|$, $|\alpha\ з| = |\alpha|$, $|\beta\ з| = |\beta|$.



Проецирующие прямые.

Прямая , перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций , является горизонтально-проецирующей прямой. Отрезок этой прямой AB.



Фронтальная проекция такой прямой перпендикулярна оси X . Проекция на горизонтальную плоскость называется *основной* проекцией. *Горизонтальные проекции всех точек прямой совпадают с основной проекцией.*

Прямая перпендикулярная фронтальной плоскости проекций называется фронтально-проецирующей. Она одновременно является горизонталью и профильной прямой, так как параллельна соответствующим плоскостям. Отрезок этой прямой C D.

Прямая, перпендикулярная профильной плоскости проекций , является профильно-проецирующей. Отрезок такой прямой EK. Эта прямая по отношению к плоскостям П1 и П 2 является одновременно горизонталью и фронталью.

Деление отрезка в заданном отношении.

Точка принадлежащая отрезку прямой, делит его в таком же отношении, что и проекция данной точки делит проекцию отрезка.
На основании указанного свойства задача на деление отрезка в заданном отношении решается путем деления в этом отношении *любой* проекции отрезка. Знание этого свойства потребуется вам при решении задачи № 8 в Тетради.

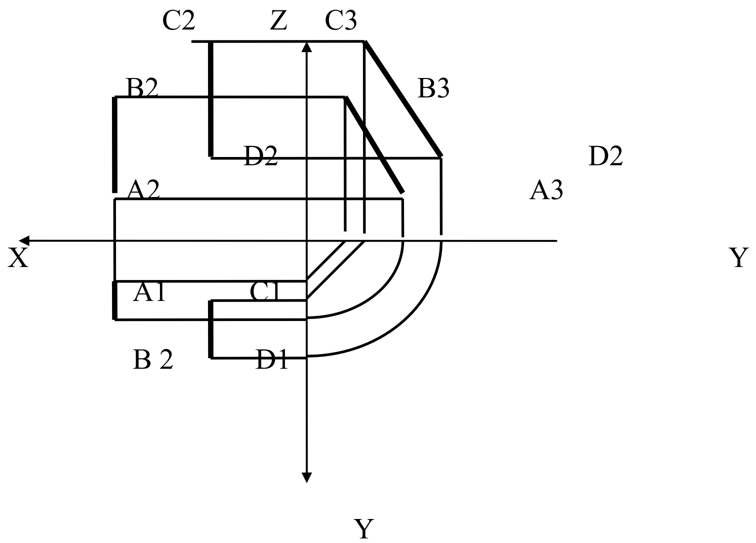
Взаимное положение прямых в пространстве.

Рассмотрим взаимное положение прямых в пространстве : параллельные прямые, пересекающиеся и скрещивающиеся.

Параллельные прямые.

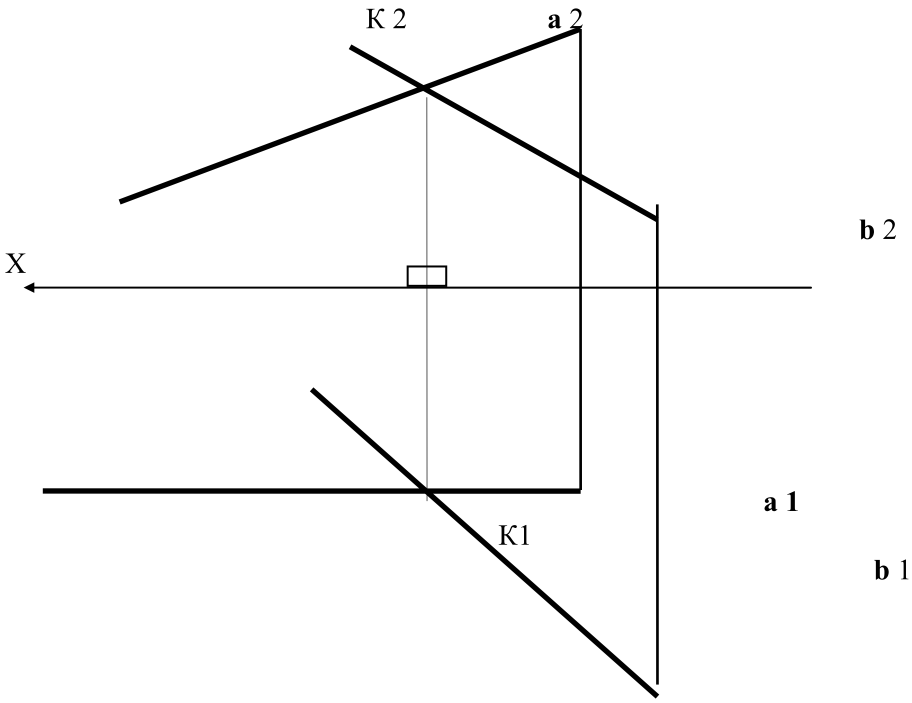
Параллельные прямые - это прямые , лежащие в одной плоскости и никогда не пересекающиеся , сколько бы их не продлевали.

Параллельные прямые имеют параллельные одноименные проекции. Обычно по двум проекциям пары прямых можно сделать заключение о их параллельности, однако если эти две прямые параллельны профильной плоскости проекций , то без рассмотрения третьей проекции прямых ничего утверждать нельзя.



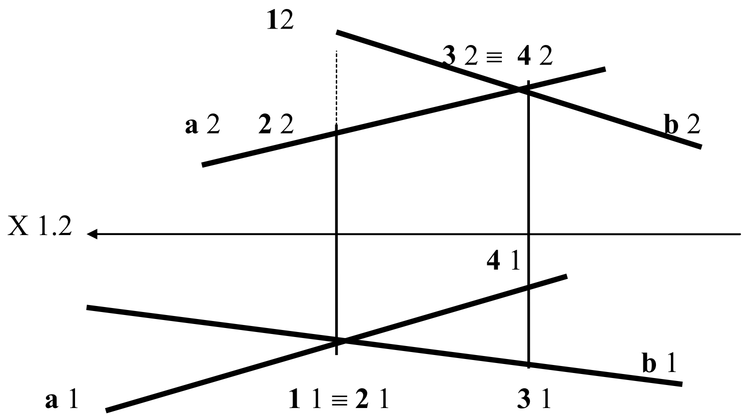
Пересекающиеся прямые.

Это прямые лежащие в одной плоскости и имеющие одну точку пересечения. Линии пересекающиеся в пространстве проектируются в виде пересекающихся проекций, причем проекции точки пересечения будут лежать на одной линии связи перпендикулярной оси X.



Скрещивающиеся прямые.

Это прямые не параллельные и не пресекающиеся между собой. Эти прямые не имеют общей точки и не лежат в одной плоскости.



На рисунке приведен чертеж скрещивающихся прямых **a** ∸ **b** . Эти прямые не имеют общих точек лежащих на одной линии связи. В этом случае нас будет интересовать какая прямая проходит выше, а какая ниже или какая прямая ближе к наблюдателю, а как дальше.Для этого рассмотрим точки у которых горизонтальные (1,2) или фронтальный (3,4) проекции совпадают, а другие нет. Такие точки называются <u>*конкурирующими. Этими точками пользуются для определения видимости.*</u> Например, если посмотреть на горизонтальную проекцию прямых не ясно какая точка выше 1 или 2 ? Однако, достаточно провести линию связи на фронтальную проекцию и вы увидите, что точка 1 принадлежащая прямой **b** *находится выше,* следовательно прямая **b** проходит выше прямой **a.**

Воспользовавшись точками **3** и **4** определим какая из прямых ближе к нам. Проведя линию проекционной связи видим , что точка 3 принадлежащая прямой **b** ближе к нам и соответственно дальше от фронтальной плоскости проекций , чем точка 4. Умение определять какая точка принадлежащая прямой или плоскости видима потребуется для решения последующих задач.

Проецирование прямого угла.

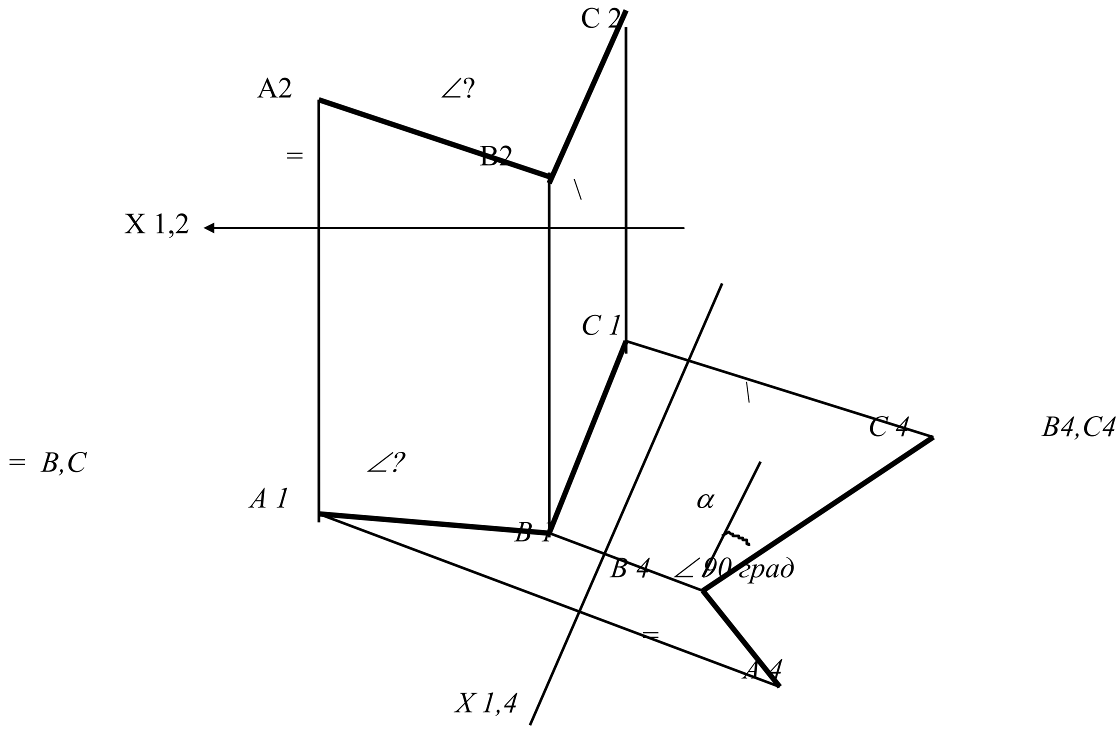
Прямой угол между двумя пресекающимися прямыми проецируется в натуральный размер только в том случае , когда одна из сторон угла параллельна плоскости проекций. Если одна сторона прямого угла будет параллельна фронтальной плоскости проекций , то прямой угол будет проецироваться в натуральный размер на фронтальную плоскость проекций.
Это имеет очень важное значение при построениях на комплексном чертеже
1) прямых перпендикулярных к друг к другу;
2) прямой перпендикулярной к плоскости ;
3) взаимно перпендикулярных плоскостей.
И соответственно, если ни одна из сторон прямого угла не занимает положение прямой уровня, то угол не будет проектироваться в натуральную величину.
Решить задачу нахождения натуральной величины угла, в таком случае можно преобразовав комплексный чертеж.
(Подробно ”О Свойствах проекций плоских углов” читайте параграф 58 Н.Г. С.А. Фролов)

Преобразование комплексного чертежа .

(Первая и вторая основные задачи преобразования чертежа).

Преобразование чертежа используется при решении задач связанных с измерениями геометрических образов или их взаимным расположением. Всего существует четыре основных задачи преобразования чертежа, две из которых связаны с преобразованием прямой линии и две с преобразованием плоскости.
Сформулируем две первые основные задачи :
1) преобразование комплексного чертежа таким образом, чтобы заданная на чертеже *прямая общего положения стала прямой уровня.*
2) преобразование комплексного чертежа так, чтобы заданная на чертеже *прямая уровня заняла проецирующие положение.*

Рассмотрим решение первой задачи на примере преобразования чертежа способом введения новой плоскости проекций. Способ введения новой плоскости проекций мы уже применяли когда рассматривали комплексный чертеж точки.
Теперь рассмотрим этот способ применительно к линиям.
Пусть мы имеем два пересекающихся отрезка прямых общего положения .
Проведем такую замену плоскости проекций , чтобы одна из прямых стала прямой уровня. Это позволит нам судить под каким углом (тупым, прямым или острым) пересекаются прямые . Причем, если этот угол не прямой, то для его измерения не достаточно будет одной замены плоскости проекций. В этом случае нам потребуется , чтобы обе стороны угла были параллельны плоскости проекций.



Введем новую плоскость проекций П 4 , так чтобы она была параллельна отрезку ВС. Одновременно плоскость П 4 перпендикулярна плоскости П 1. Эти плоскости образуют новую ось X 1,4. Ось на чертеже проводим параллельно горизонтальной проекции отрезка В 1С 1. Строим новую проекцию отрезка ВС:

1)Γ (B1,B4) $\supset$ В 1 ; (В 1, В4) $\perp$ X 1,4. (построить прямую В1,В4, которая включает точку В 1 ; прямая перпендикулярна оси X 1,4)
2) Γ В 4 $\subset$ (В1, В4) ; $|$В 4, X 1,4$|$ = $|$В 2, X 1,2$|$ (построить точку В 4 принадлежащую прямой В1,В4 ; расстояние от В 4 до оси X 1,4 равно расстоянию от В2 до оси X 1,2.)
3) Γ(C1, C4) $\supset$ C 1 ; (C 1, C 4) $\perp$ X 1,4 (построить линию С1,С4, которой принадлежит точка С1; линию С1,С4 провести перпендикулярно оси X 1,4)
4) Γ C 4 $\subset$ (C 1, C4) ; $|$ C4, X 1,4 $|$ = $|$ C2, X 1,2$|$ (построить точку С 4 принадлежащую прямой С1, С4; расстояние от точки С4 до оси X 1,4 равно расстоянию от точки С2 до оси X 1,2)
5) $\Gamma|$ В 4 С 4 $|\supset$ В 4 $\wedge$ С 4 (построить проекцию отрезка прямой В4,С4 включающего точки В4 и С4)

.

На этом этапе мы построили проекцию отрезка прямой В4,С4, которая обладает следующими метрическими свойствами :длина проекции отрезка равна длине самого отрезка . Величина угла **α 4** между проекцией В4,С4 и новой осью X 1,4 равна углу наклона отрезка прямой В,С к плоскости **П 1.**

Чтобы закончить наши построения достаточно :

6)Γ (A1,A4) $\supset$ A1 ; (A 1,A4) $\perp$ X 1,4. (построить прямую А1,А4, которая включает точку А 1 ; прямая перпендикулярна оси X 1,4)
7) Γ A 4 $\subset$ (A1, A4) ; $|$A 4, X 1,4 $|$ = $|$ A 2, X 1,2$|$ (построить точку А 4 принадлежащую прямой А1,А4 ; расстояние от А 4 до оси X 1,4 равно расстоянию от А2 до оси X 1,2.)
8) $\Gamma|$A 4, В 4 $|\supset$ A 4 $\wedge$ В 4 (построить проекцию отрезка прямой А4,В4 включающего точки А4 и В4).

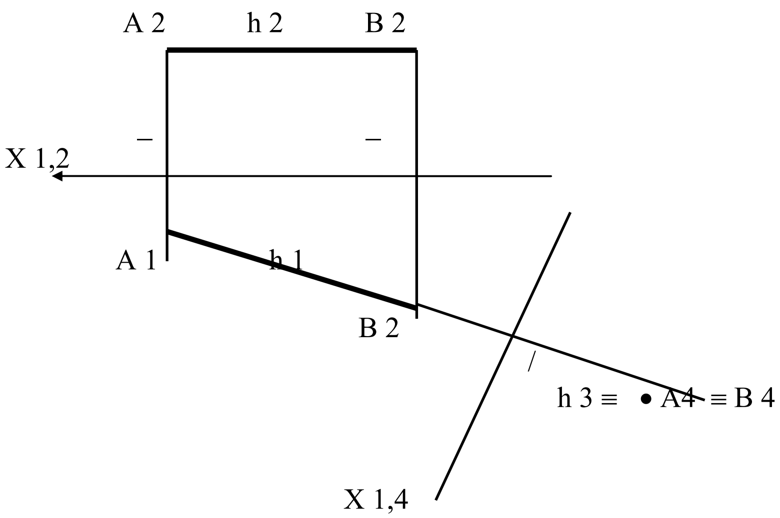
Теперь мы построили проекцию угла А4В4С4 на плоскость П4 , причем проекция равна натуральной величине угла АВС, так как это прямой угол.

Рассмотрим решение второй основной задачи преобразования чертежа

на примере:

Изобразим на чертеже горизонталь h.
Необходимо ввести новую плоскость проекций так, чтобы по отношению к ней горизонталь заняла проецирующие положение, т. е. спроецировалась в точку. Так как данная прямая параллельна горизонтальной плоскости проекций , то для того чтобы она спроецировалась в точку в точку необходимо заменить фронтальную плоскость проекций на новую П4 :

П4 ⊥ П1 ∧ ⊥ АВ.



Для всех точек линии АВ (горизонтали) будет одна линия проекционной связи перпендикулярная оси X 1,4, а расстояние от горизонтали до горизонтальной плоскости проекций все одинаковы. Измерим расстояние на плоскости П 2 и отложим его от оси X 1,4 по линии проекционной связи. Проекция на плоскость П4 будет обладать собирательным свойством .

Если бы прямая занимала общее положение , то преобразовать ее в прямую проецирующую можно двумя заменами, т. е. обе задачи решают последовательно.

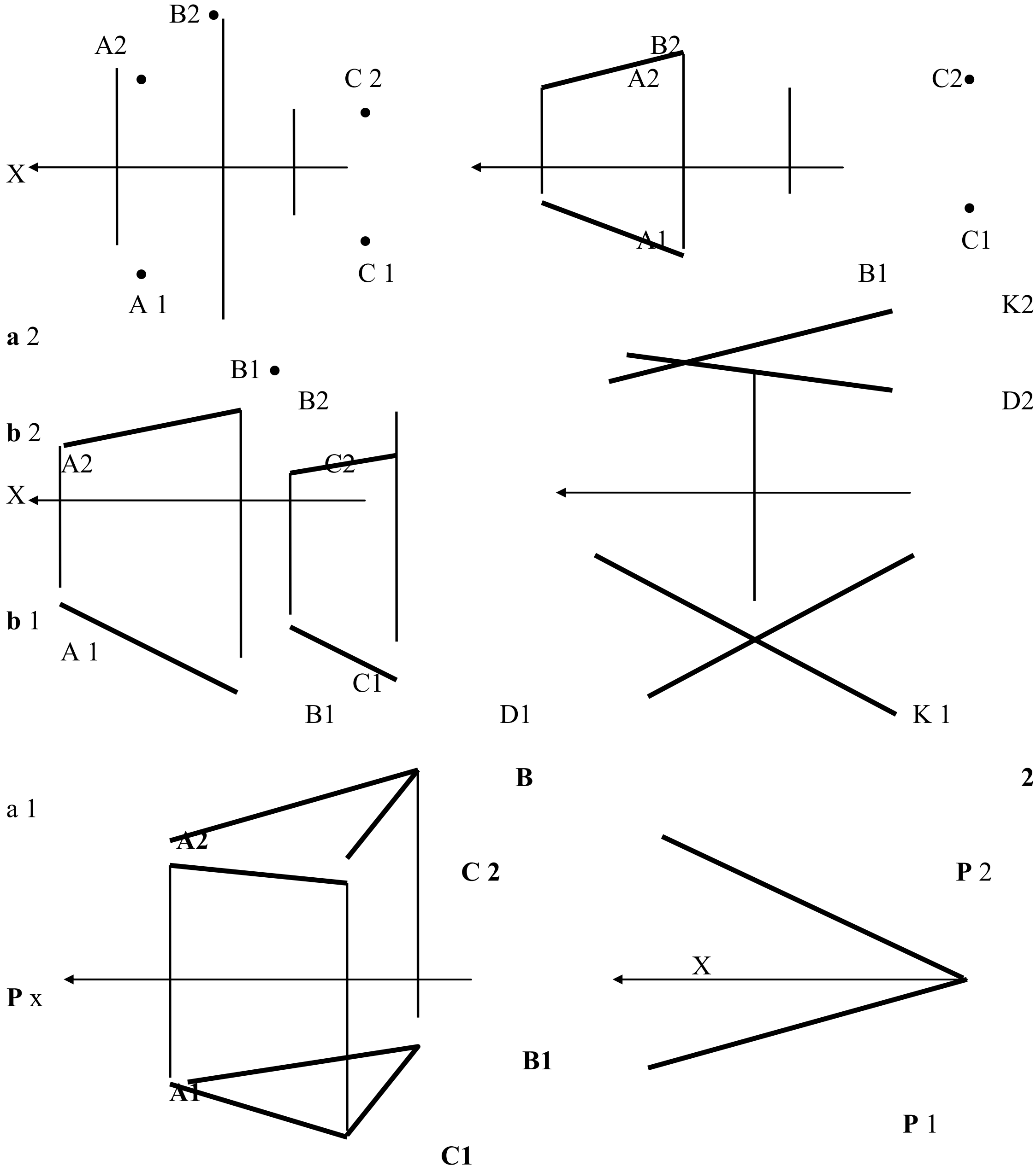
В качестве литературы по данному разделу рекомендую учебное пособие М.А. Луговой Точка, прямая, плоскость. МАДИ, Москва 1995 г.

При подготовке к практическому занятию прошу решить задачи 6, 7, 10 из Тетради.

Плоскость, линии и точки в плоскости.

Проецирование элементов, определяющих плоскость.

При ортогональном проецировании любая плоскость может быть задана на чертеже проекциями трех точек, не лежащих на одной прямой ; проекциями прямой и точки, не лежащей на данной прямой; проекциями двух параллельных прямых; двух пересекающихся прямых; проекциями любой плоской фигуры. Плоскость может быть задана *следами* - линиями пересечения плоскости с плоскостями проекций.



Плоскости бывают общего положения и частного. Выше на рисунках приведены примеры плоскостей общего положения.

Плоскость общего положения не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций.

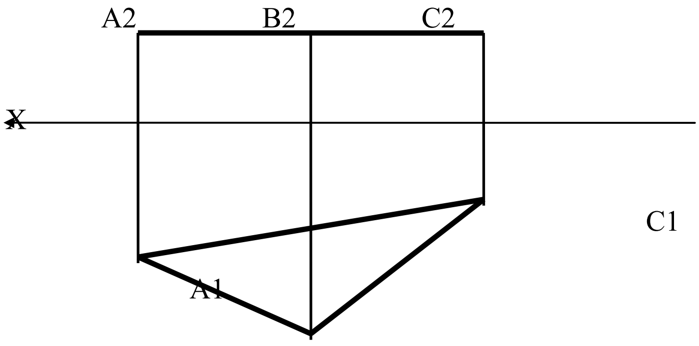
Плоскость *частного* положения параллельна или перпендикулярна хотябы к одной из плоскостей проекций . Плоскости частного положения делятся на две группы :

плоскости уровня - перпендикулярные двум плоскостям проекций и параллельные одной из них ;

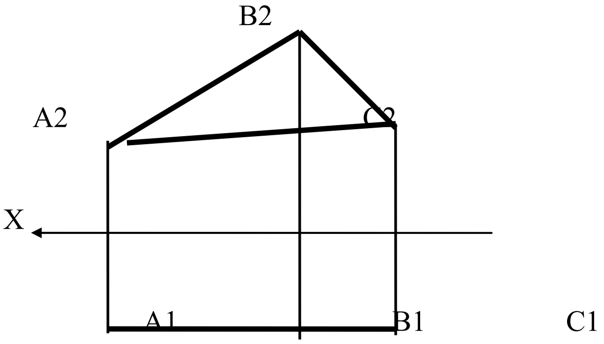
проецирующие - перпендикулярные к одной плоскости проекций и наклонные к двум другим.

Плоскости уровня могут находиться в трех положениях :

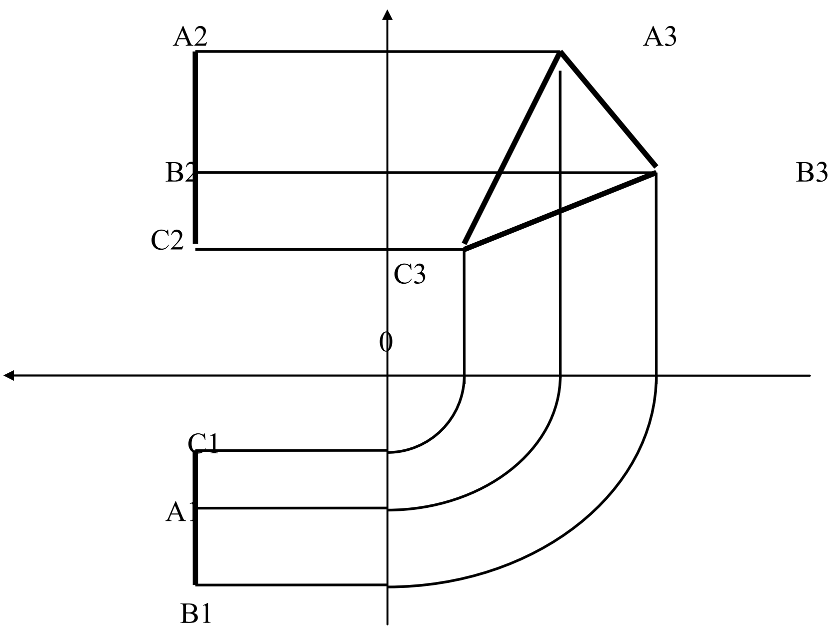
1) параллельна горизонтальной плоскости проекций и перпендикулярна фронтальной и профильной;



2) параллельна фронтальной плоскости и перпендикулярна горизонтальной и профильной;

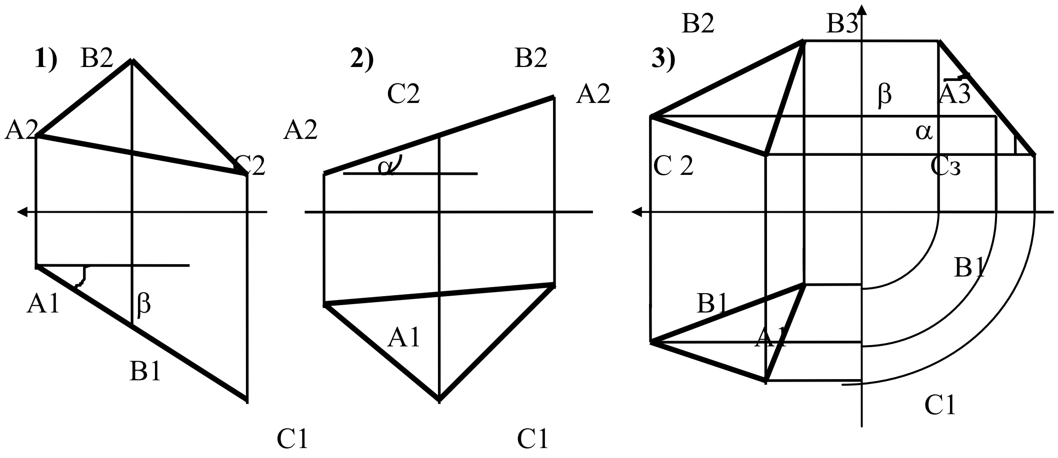


3) параллельна профильной плоскости проекций и перпендикулярна горизонтальной и фронтальной плоскостям проекций:



Прецирующие плоскости также могут находиться в трех положениях :

1) перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций и наклона к фронтальной и профильной плоскостям:



2) перпендикулярна фронтальной плоскости проекций и наклона к горизонтальной и профильной плоскостям.

3) перпендикулярна профильной плоскости проекций и наклона к горизонтальной и фронтальной плоскостям.

Углы между проецирующей плоскостью и не перпендикулярными ей плоскостями проекций *проецируются в натуральную величину на* ту плоскость проекций , которой перпендикулярна данная плоскость.

Плоскости уровня и проектирующиеся плоскости *характерны* тем, что проекции *всех точек и линий лежащих в этих плоскостях* , будут лежать на проекции этой плоскости, которая изображается *прямой линией*.

Рассмотрим **ОСОБЫЕ ЛИНИИ ПЛОСКОСТИ.**

Среди линий принадлежащих плоскости можно выделить линии параллельные плоскостям проекций : *горизонтали плоскости, фронтали плоскости, профильные прямые плоскости*. К особым относится и *линия наклона,* которая *определяет угол наклона плоскости* к той или иной плоскости проекций.

Линию наклона к плоскости П1 принято называть линией ската. Линия наклона к плоскости П2 перпендикулярна к фронталям плоскости, линия ската перпендикулярна к горизонталям плоскости, а линия наклона к плоскости П3 перпендикулярна к профильным прямым плоскости.

Условием принадлежности прямой плоскости будет:

если две точки прямой принадлежат плоскости, то и все точки данной прямой будут лежать в этой плоскости.

Т.е., чтобы начертить прямую лежащую в плоскости, достаточно найти две общие точки.

Проведем горизонталь в плоскости заданной отсеком:

Пространственный алгоритм: ⌈ h ⊂ Δ ABC)

Мы знаем, что фронтальная проекция горизонтали параллельна оси X, вместе с тем горизонталь принадлежит плоскости заданной треугольником ABC.

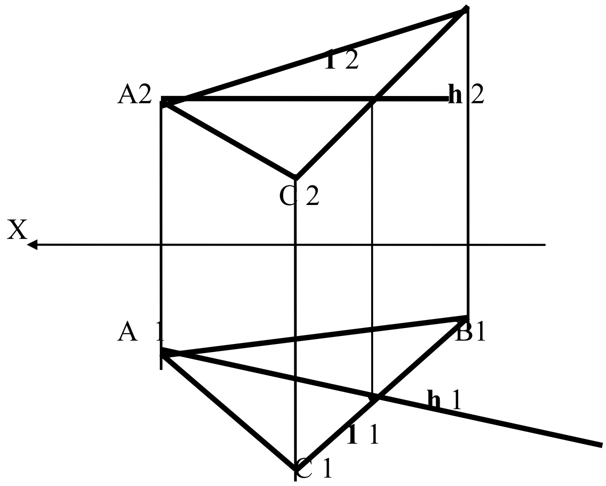
Проведем через точку A 2 линию параллельную оси X и отметим пересечение этой линии со стороной B2C2 точкой **1** 2 .

(ГА: ⌈ h 2 ∩ Δ A2B2C2) ; h 2 || X) (Построить фронтальную проекцию горизонтали пересекающую треугольник A2B2C2; фронтальная проекция горизонтали параллельна оси X).

Проведем линию проекционной связи для нахождения проекции **1** 1.

⌈11⊂│B1C1│ ∧ (**1**2 11) (Построить точку **1**1 принадлежащую отрезку B1C1 и линии проекционной связи **1** 2 **1** 1.

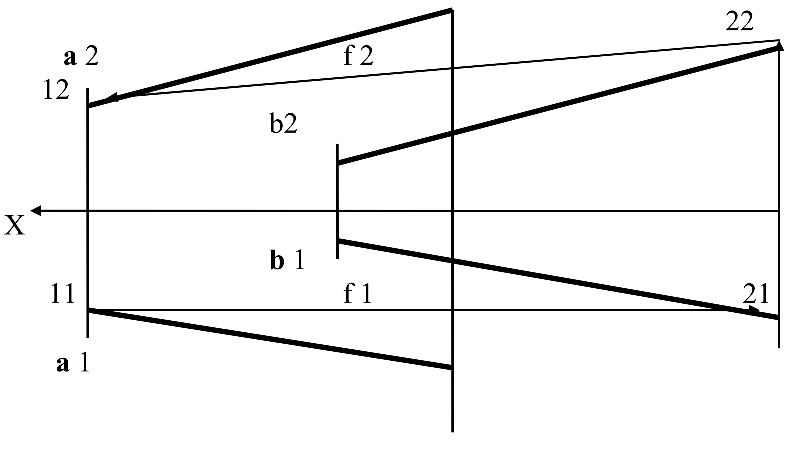
B 2



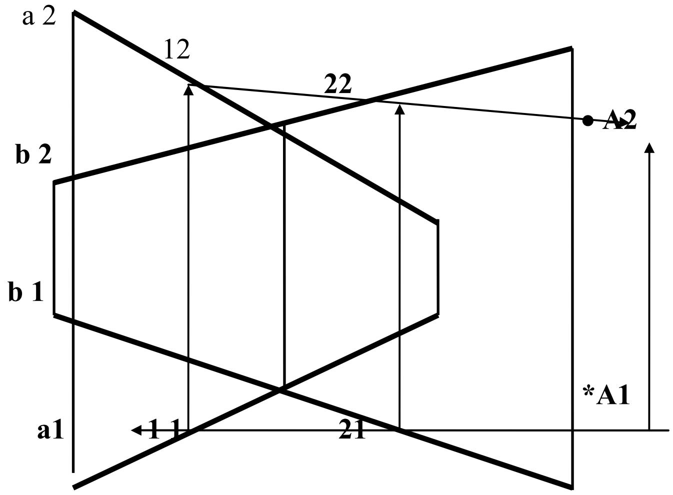
Г (A1 **1**1) ⊃ A1 ∧ **1**1
(Построить линию A1 **1**1 включающую точки A1 и **1**1).
Эта линия будет горизонтальной проекцией горизонтали.

Если бы плоскость была бы задана при помощи трех точек не лежащих на одной прямой и надо было бы провести горизонталь плоскости, задача *мало бы отличалась* от уже рассмотренной. Аналогично, если плоскость задана двумя пересекающимися прямыми. Любые две стороны нашего треугольника ABC можно рассматривать как пересекающиеся прямые.

Рассмотрим случай построения **фронтали плоскости**, если плоскость *задана двумя параллельными прямыми.*
Воспользуемся тем, что нам известно направление горизонтальной проекции фронтали. Возьмем произвольную точку **1**1 на прямой **a**1 и проведем линию параллельно оси X до пересечения в точке **2**1 с прямой **b** 1.
Воспользовавшись линиями проекционной связи найдем точки **1**2 и **2**2 через которые проходит фронтальная проекция фронтали и проведем ее.



Точка в плоскости.
Точка принадлежит плоскости, если лежит на прямой принадлежащей плоскости.
Пусть плоскость задана пересекающимися прямыми a и b.
Имеется горизонтальная проекция точки A1 необходимо построить A2.



Через горизонтальную проекцию точки **а**1 проведем произвольную прямую пересекающую горизонтальные проекции линий задающих плоскость в точках 1 1 и 2 1. Построим фронтальную проекцию этой линии и на ней найдем точку а 2.

Подумайте самостоятельно, как бы мы решали аналогичную задачу, если бы были заданы обе проекции точки А и требовалось определить принадлежит ли точка А плоскости заданной пересекающимися прямыми.

Дома самостоятельно, на листе в клетку в тетради для конспектов построить эллипс. Большую и малые оси задать произвольно. Прошу не строить овал вместо эллипса.

ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

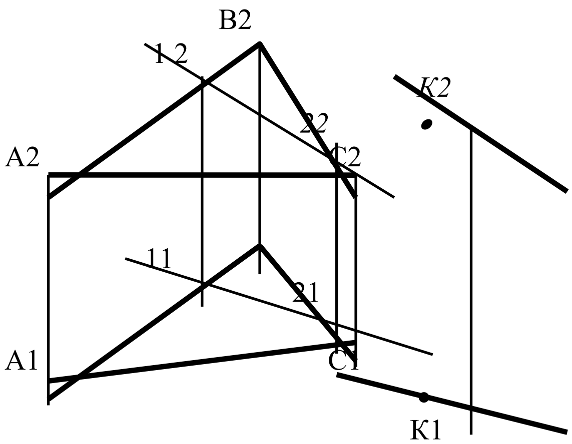
Прямая параллельная плоскости.

Если прямая АВ параллельна прямой лежащей в некоторой плоскости, то она параллельна этой плоскости.

Если необходимо через заданную точку провести прямую параллельную заданной плоскости необходимо провести в этой плоскости прямую, а затем параллельно ей через заданную точку проводят искомую прямую.

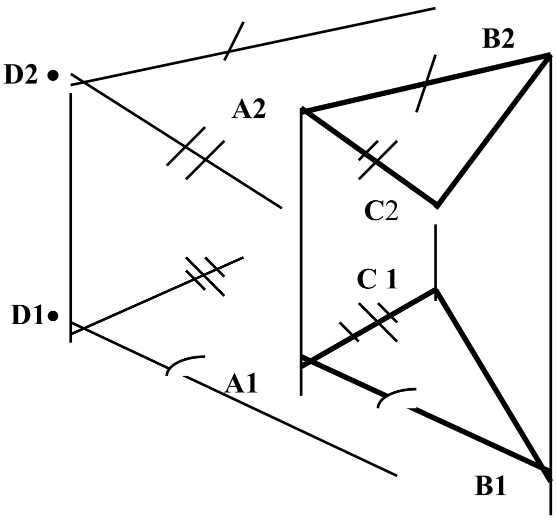
Например, плоскость задана отсеком АВС и надо провести параллельную плоскости прямую через точку К.

Проведем горизонтальную проекцию произвольной прямой 11 - 22, затем построим фронтальную проекцию 12 - 22. Через проекции токи **К** проводим линии параллельные соответствующим проекциям прямой 1 - 2.



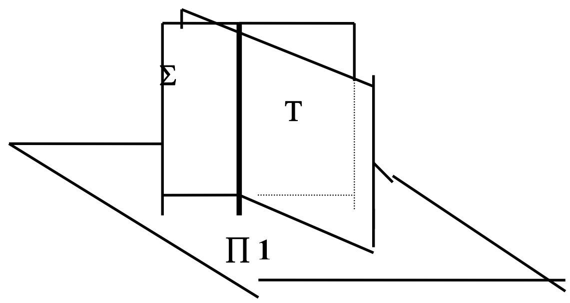
Параллельные плоскости.

Плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.
Поэтому, если требуется через точку **D** провести плоскость параллельную заданной АВС, то через точку проводят две прямые, параллельные любым прямым, находящимся в заданной плоскости.



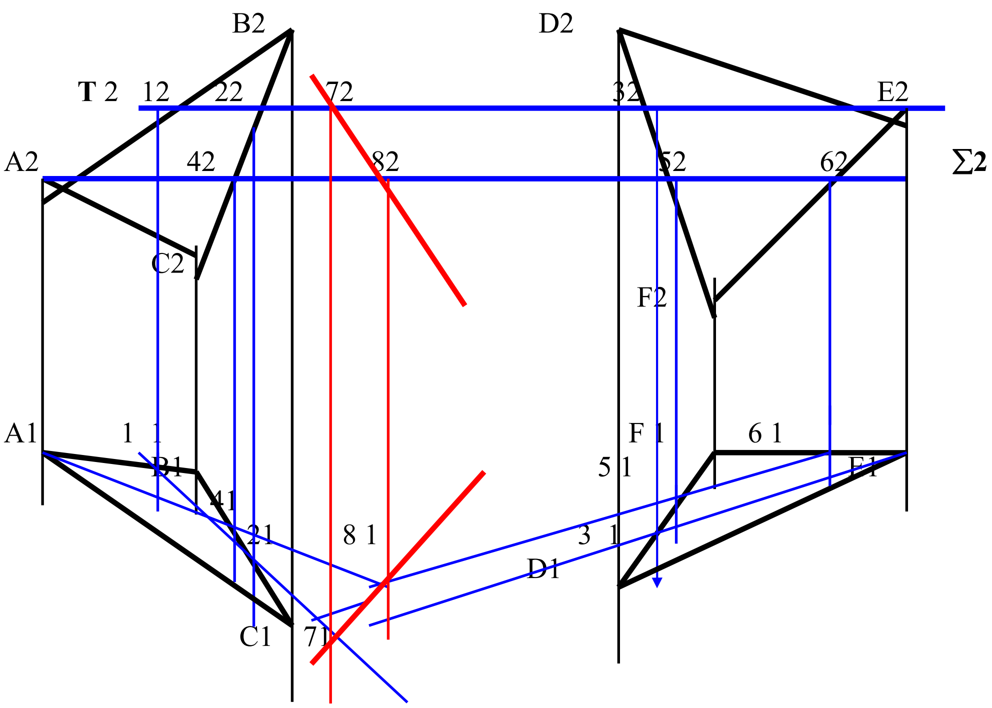
Пересекающиеся плоскости.

Если плоскости не параллельны, то они обязательно пересекутся.
Если плоскости занимают частное положение в пространстве, то положение линии пересечения определить довольно просто.
Например, подумайте какое положение в пространстве займет линия пересечения двух горизонтально проецирующих плоскостей ?



Рассмотрим случай когда плоскость общего положения пересекается с плоскостью параллельной плоскости **П**1, т.е. с горизонтальной плоскостью.
Априори можно утверждать, что линия пересечения будет горизонтальной прямой. Действительно, линия пересечения принадлежит одновременно плоскости общего положения и горизонтальной плоскости, а все линии принадлежащие горизонтальной плоскости являются горизонталями.
Аналогичные рассуждения можно привести рассматривая пересечение плоскости общего положения и фронтальной плоскости. Линия пересечения будет фронталью. Запомним это.

А теперь рассмотрим наиболее сложный случай пересечения двух плоскостей общего положения.



Плоскости общего положения заданные треугольниками ABC и DFE.
Задача решается с помощью двух вспомогательных горизонтальных плоскостей T и ∑. Эти плоскости пересекут заданные по горизонталям 1и 2,
3 и E ; A и 4, 5 и 6. Фронтальные проекции горизонталей очевидны. Найдем горизонтальные проекции этих горизонталей на чертеже при помощи линий проекционной связи.
Продлевая горизонтальные проекции линий пересечения можно найти где они пересекаются между собой - это точки 7 1 и 8 1. Каждая из этих точек принадлежит трем плоскостям одновременно. Точка 7 принадлежит плоскостям T, ABC, DFE , а точка 8 плоскостям ∑, ABC, DFE. Через точки 7 и 8 можно провести линию пересечения плоскостей ABC и DFE .Построение начинаем с горизонтальной проекции соединяя точки 71 и 81, а затем с помощью линий проекционной связи находим фронтальную проекцию 72, 82.

При решении подобных задач можно в качестве вспомогательных применять плоскости фронтальные и фронтально или горизонтально проецирующие.

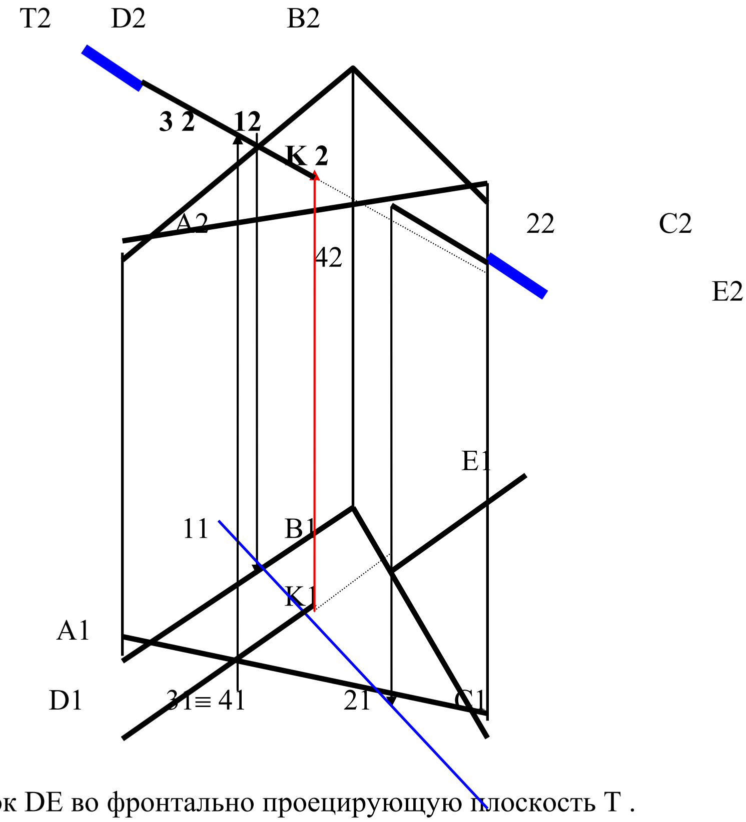
ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ С ПЛОСКОСТЬЮ.

Если прямая не параллельна плоскости, то она пересекает ее под тем или иным углом.

Задача на пересечение прямой с плоскостью является одной из основных задач.
Алгоритм или план решения таких задач будет следующий.

1) Заключаем отрезок прямой во вспомогательную проецирующую плоскость и находим линию пересечения плоскостей.
2) Находим точку пересечения отрезка прямой с линией пересечения плоскостей, которая будет искомой точкой пересечения прямой с заданной плоскостью.
3) Определяем видимость отрезка прямой используя метод конкурирующих точек.

Например. Отрезок DE общего положения пересекает плоскость общего положения ABC .

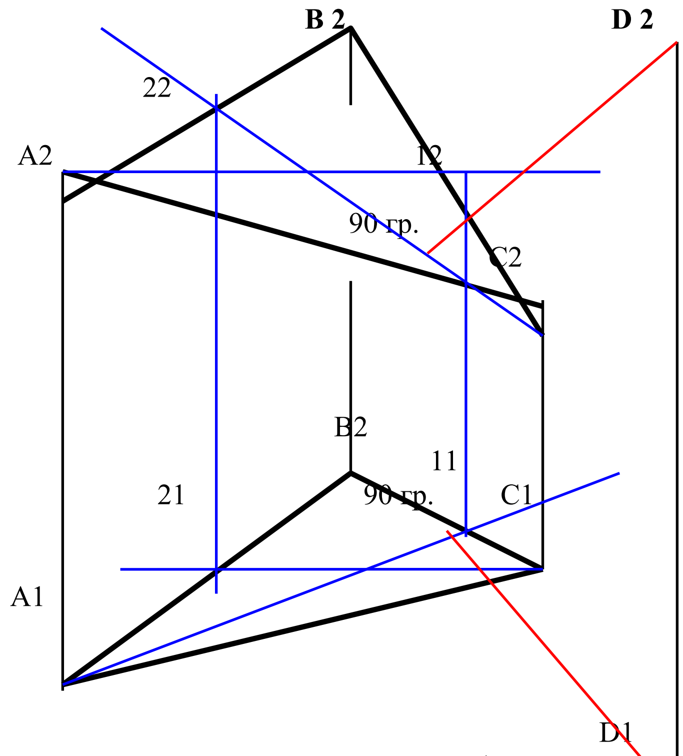


Заключаем отрезок DE во фронтально проецирующую плоскость Т .
Находим проекции линии пересечения 1,2, сначала фронтальную проекцию 12, 22 , а затем горизонтальную 11,21. Находим горизонтальную проекцию точки К1, а затем фронтальную К2.

Для определения видимости воспользуемся конкурирующими точками 3 и 4.
На горизонтальной проекции точка 31 принадлежащая прямой накладывается на точку 41 принадлежащую плоскости, однако достаточно по линии проекционной связи подняться на фронтальную плоскость проекций и видим, что точка 32 выше точки 42. Значит до точки пересечения с плоскостью прямая на горизонтальной проекции видима.
Примените самостоятельно этот метод для определения видимости фронтальной проекции прямой.

ПРЯМАЯ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНАЯ ПЛОСКОСТИ

Для того, чтобы прямая была перпендикулярна плоскости, она должна быть перпендикулярна по крайней мере двум прямым, лежащим в плоскости и не параллельным друг другу.
Прямой угол проецируется в натуральный размер только в том случае, когда одна его сторона параллельна плоскости проекций. (СМ прошлую лекцию).
Поэтому достаточно в плоскости провести горизонталь и фронталь и к ним восстановить перпендикуляр, так как эти прямые проведенные из одной точки задают плоскость.
Для того чтобы восстановить перпендикуляр к плоскости, необходимо, чтобы его горизонтальная проекция была перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали, а фронтальная проекция фронтальной проекции фронтали.
Горизонтали и фронтали плоскости служат для определения ***направления*** проекций перпендикуляра к плоскости.
Если необходимо найти точку пересечения перпендикуляра с плоскостью, то СМ задачу на пересечение прямой с плоскостью.



Дома самостоятельно по точкам построить параболу. Построения выполнить на листе бумаги в клетку в тетради для конспектирования.

ПОВЕРХНОСТИ И ТЕЛА

Все **поверхности** можно подразделить на *графические*, закон образования которых нам не известен и примером такой поверхности может быть топографическая поверхность Земли и *геометрические*, закон которых известен.

Часть пространства, ограниченная со всех сторон поверхностью, называется **телом.**

Геометрические поверхности могут быть образованы движением в пространстве прямой или кривой линии, которая называется образующей.

В учебном пособии Н. Н . Рыжова “Курс начертательной геометрии” , часть 1, М.1995 г. из многообразия поверхностей выделяются следующие :

линейчатые поверхности, которые могут быть образованы движением в пространстве прямой линии ;

циклические поверхности, которые могут быть образованы движением в пространстве окружности ;

поверхности вращения, которые могут быть образованы движением какой либо линии вокруг закрепленной оси;

винтовые поверхности, при образовании которых хотя бы одна точка образующей совершает винтовое движение.

У линейчатых и циклических поверхностей форма образующей остается постоянной, а закон ее движения меняется.

Для поверхностей вращения закон движения постоянен, но разнообразны формы образующих.

Для винтовых поверхностей возможно как разнообразие форм образующих, так и широкий диапазон законов движения.

Закон движения образующей это по сути закон определения и построения образующей в каждый момент ее движения.

Совокупность геометрических элементов, которая будучи заданной позволяет реализовать закон образования поверхности, называется *определителем поверхности*.

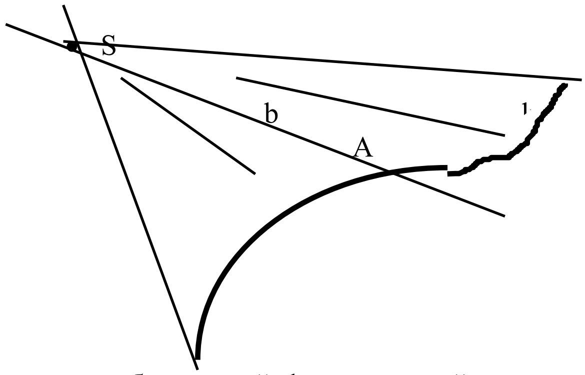
Обычно определитель и закон образования поверхности представляют в определенной знаковой записи, которую называют *формулой поверхности*.

Эпюр поверхности. Изображая поверхность в ортогональных проекциях, обычно строят эпюр тех линий или точек , которые определяют единственно возможную форму поверхности.

Рассмотрим представителей семейства линейчатых поверхностей.

Линейчатая поверхность вполне определена, если известны три ее направляющие. Однако, в некоторых случаях достаточно знать расположение только одной направляющей и вершины.

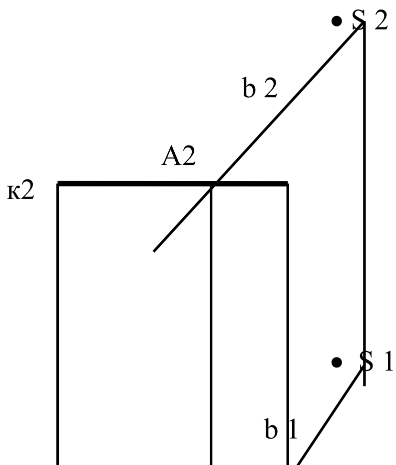
Зададим неподвижную точку S (вершину) и направляющую k по которой скользит образующая b.



Положение образующей b проходящей через точку A , как и через любую другую точку направляющей k однозначно задает поверхность. В данном случае коническую.

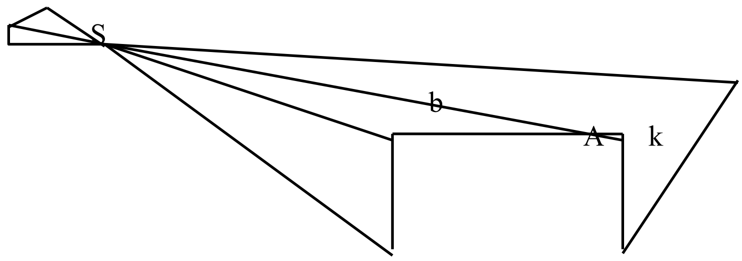
На эпюре коническая поверхность может быть задана так

Формула поверхности Ф{⌊ (S,к) (⌊ι ⊃ S, ⌊ι ∩ к) }



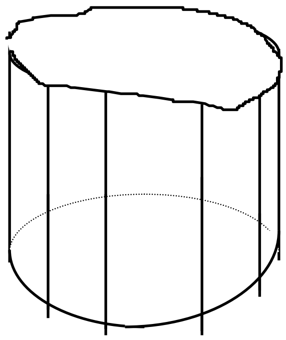
S1 -A1 горизонтальная проекция построенной произвольной образующей конической поверхности.

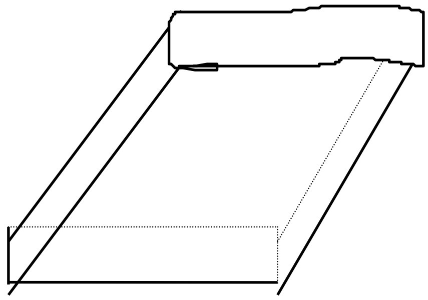
Если направляющая представляет собой ломаную линию, то поверхность становится пирамидальной и относится к гранным линейчатым поверхностям.



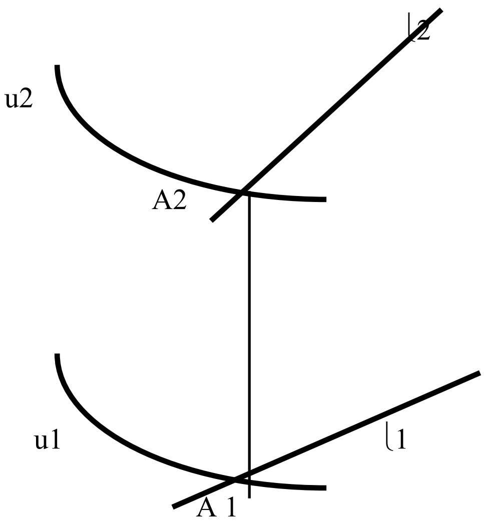
На практике редко приходится изображать коническую или пирамидальную поверхность. Гораздо чаще изображают тела - конус или пирамиду.

Если вершина поверхности удалена в бесконечность, то все образующие пересекающиеся с направляющей параллельны друг-другу. Когда направляющая кривая линия - поверхность носит название цилиндрической, а когда она ломаная, то поверхность будет призматической. Таким образом цилиндрическая поверхность это частный случай конической поверхности, а призматическая поверхность частный случай пирамидальной.





На эпюре цилиндрическая поверхность может быть задана так



Формула поверхности $\Phi\{ l\,(l, u\,; l \cap u\,)\,(l_1 \parallel l,\ l_1 \cap u\,)\}$.

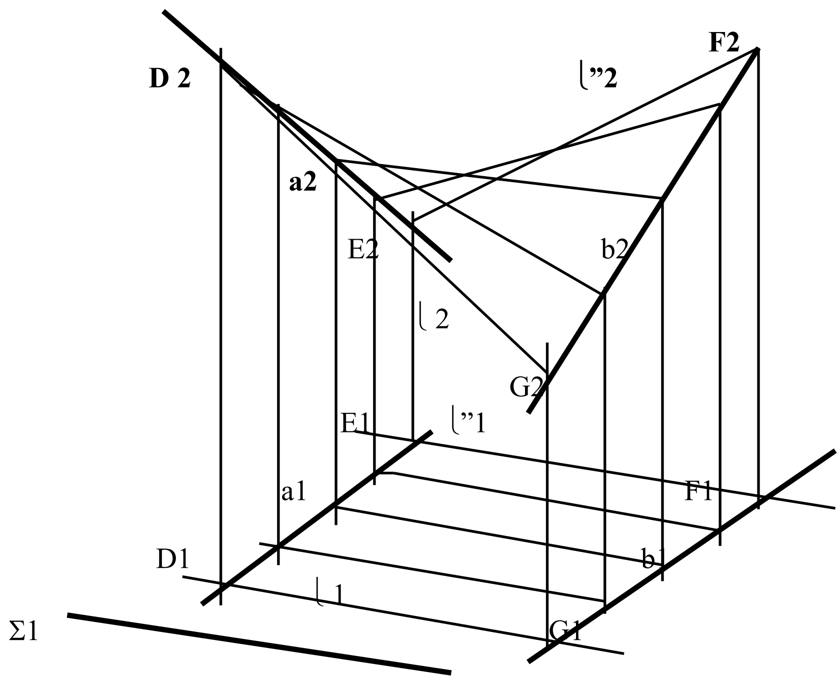
**Линейчатые поверхности с двумя направляющими
и плоскостью параллелизма.**

Это линейчатые поверхности заданные двумя направляющими и дополнительным условием - образующая параллельна плоскости. Плоскость называют плоскостью параллелизма.

В качестве примера рассмотрим построение *гиперболического параболоида*, который в технике часто называют *косой плоскостью.*

Формула поверхности $\Phi\{\lfloor(a, b, \Sigma)\ (\lfloor\iota \cap a, b;\ \lfloor\iota \,||\, \Sigma)\}$.

Направляющими примем две скрещивающиеся прямые **a** и **b** и вертикальную плоскость параллелизма Σ**.** Образующая ⌊ скользит по этим направляющим параллельно плоскости Σ. Построение эпюра поверхности произведем следующим образом. Построим проекции двух произвольных образующих ⌊ и ⌊\` и отметим точки пересечения с направляющими **a** и **b** как **D, E , F, G.**



Проекции D1 E1, F1 G1 разделим на произвольное число равных частей и проведем через них горизонтальные проекции образующих. Затем построим фронтальные проекции образующих. Кривая огибающая фронтальные проекции образующих представляет собой *параболу.*

Подобную задачу вы будете решать в Тетради (58) на практических занятиях.

Линейчатые поверхности с тремя направляющими прямыми линиями.

Если три направляющие **b , c, d** прямые линии не параллельны никакой плоскости, то скользящая по ним прямая *ℓ* образует поверхность *однополостного гиперболоида*.

Для большей наглядности ограничим поверхность двумя плоскостями пересекающимися с поверхностью по окружностям (так как это представлено на макете). Сечение поверхности может представлять и эллипс.

Построение эпюра поверхности заключается в том, что проекции окружностей - сечений делят на произвольное число частей . В данном случае на 12 частей.
Деление произведем циркулем начав с горизонтальных проекций сечений.
(На горизонтальной проекции они накладываются друг на друга).

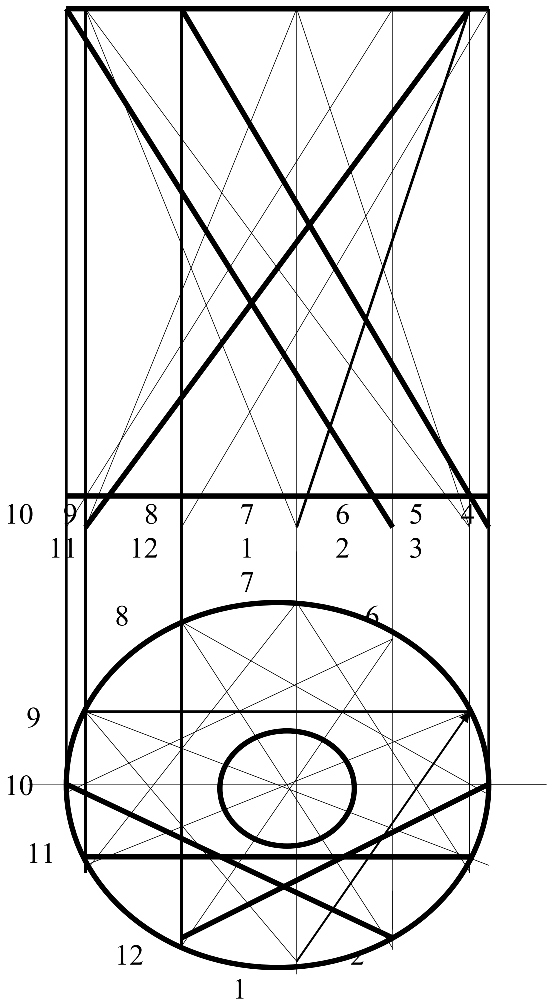
Когда деление произведено как на горизонтальных, так и на фронтальных проекциях соединяем первую точку (т.1) нижней окружности с пятой точкой (т.5) верхней окружности . Строим горизонтальную, затем фронтальную проекции линии 1 - 5. Вторую точку (т.2) нижней окружности с шестой точкой (т.6) верхней окружности и т.д.. Следите за построением на доске.

Таким образом строится *каркас поверхности*.

Второй каркас состоит из прямых, соединяющих первую точку верхней окружности с пятой нижней окружности и т.д..

Очерк поверхности на плоскостях П 2 и П 3 - *гиперболы*. Он представляет собой огибающие прямые.

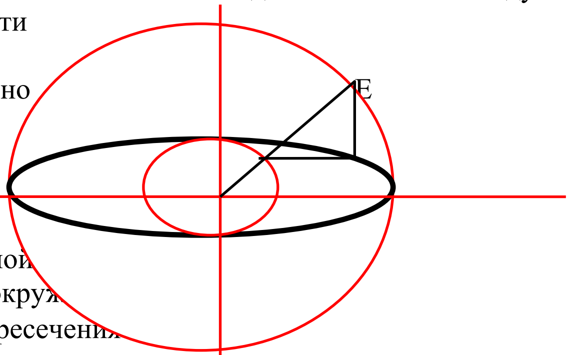
На макете видно, что эта поверхность может превращаться в коническую или цилиндрическую, которые являются частными случаями однополостного гиперболоида.



Поверхность эта не развертываемая. Часто используется в технике при строительстве водонапорных башен, телевизионных мачт и других сооружений.

На прошлой лекции я предлагал построить эллипс по двум осям.
В учебнике Н.С. Кузнецова на 33 странице , задача 3.(Издание 1969 г.)

Для построении эллипса по его осям необходимо выполнить следующее.
Проведем две окружности с центром в точке О , радиусами соответственно равными половине большой и малой осей эллипса.



Отметим точку Е , пересечения произвольной прямой ОЕ с большей окружностью и точку N ее пересечения с меньшей окружностью.
Через точку Е проведем линию параллельно малой оси эллипса, а через точку N линию параллельно большой оси эллипса.

Эти прямые пересекаются в точке К, принадлежащей эллипсу. Кроме найденной точки эллипсу принадлежат уже заданные четыре точки расположенные на концах большой и малой осей.

К следующему разу в тетради для конспектов постройте параболу.

ПОВЕРХНОСТИ И ТЕЛА
(продолжение)

Ц И К Л И Ч Е С К И Е П О В Е Р Х Н О С Т И

Циклические поверхности, могут быть образованы движением в пространстве какой - либо окружности , постоянного или переменного радиуса при перемещении ее центра по криволинейной направляющей , а плоскость окружности остается перпендикулярной к этой кривой.

Под это определение в качестве частного случая могут подойти уже известные нам как линейчатые поверхности кругового конуса и цилиндра.

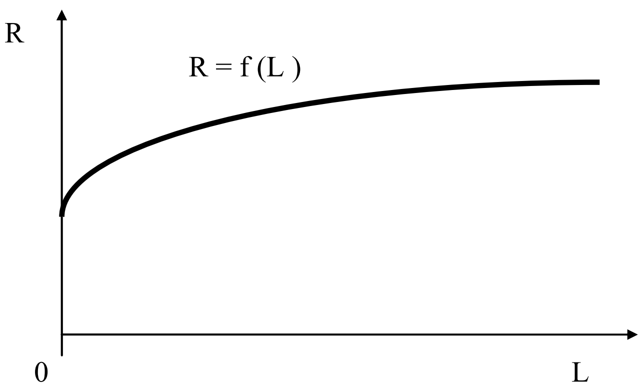
Действительно, если направляющая прямая, а окружность постоянного радиуса, получим цилиндр.

Если направляющая прямая, а окружность монотонно увеличивается (уменьшается) поверхность будет коническая.

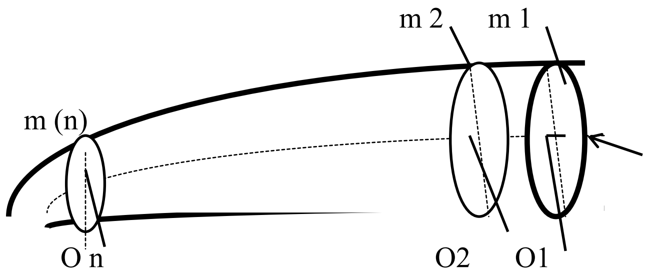
Давайте в качестве примера циклической поверхности рассмотрим трубчатую поверхность переменного радиуса.

Для этой поверхности надо задать во-первых закон направляющей, а во вторых закон изменения радиуса окружности.

Зададим изменение радиуса R по длине дуги графиком



Определитель трубчатой поверхности переменного радиуса будет иметь вид $\Phi[\, L ,\ R = f(L)\,]$.



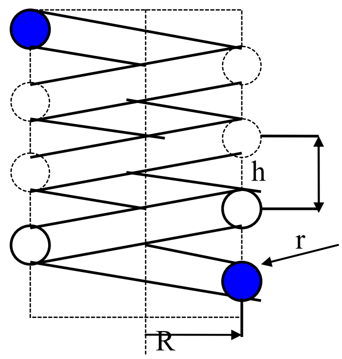
Если радиус постоянный, то поверхность называется просто *трубчатой.*

Если направляющей будет окружность, то при движении по ней окружности постоянного радиуса получится торовая поверхность.

Более подробно мы остановимся на рассмотрении торовых поверхностей в разделе поверхности вращения.

Давайте приведем еще пример циклической поверхности.

Таким примером может служить поверхность цилиндрической винтовой пружины.



Подсчитаем число параметров которые задают некоторые частные виды циклических поверхностей.

Для цилиндра вращения это один параметр - радиус, для тора это два параметра это радиус окружности направляющей и радиус окружности которая перемещается в плоскости перпендикулярной направляющей, для трубчатой винтовой поверхности (поверхность пружины) это три параметра -

два радиуса (R, r) и шаг (h).

П О В Е Р Х Н О С Т И В Р А Щ Е Н И Я

Поверхности вращения, могут быть образованы движением какой либо линии (образующей) вокруг закрепленной оси. Образующая может быть как плоской так и пространственной кривой.

Для поверхностей вращения закон движения постоянен, но разнообразны формы образующих.

В примере в качестве образующей примем кривую k состоящую из дуг двух окружностей (R , r) , которая вращается вокруг оси j.

Любая точка кривой k описывает вокруг оси окружность лежащую в плоскости перпендикулярной оси и с центром принадлежащим оси. Эти окружности называют параллелями поверхности. Наибольшую из параллелей называют экватором, а наименьшую - горлом.

Если плоскость которой рассекают поверхность включает в себя ось, то получаемые кривые называют меридианами. Все меридианы равны между собой.

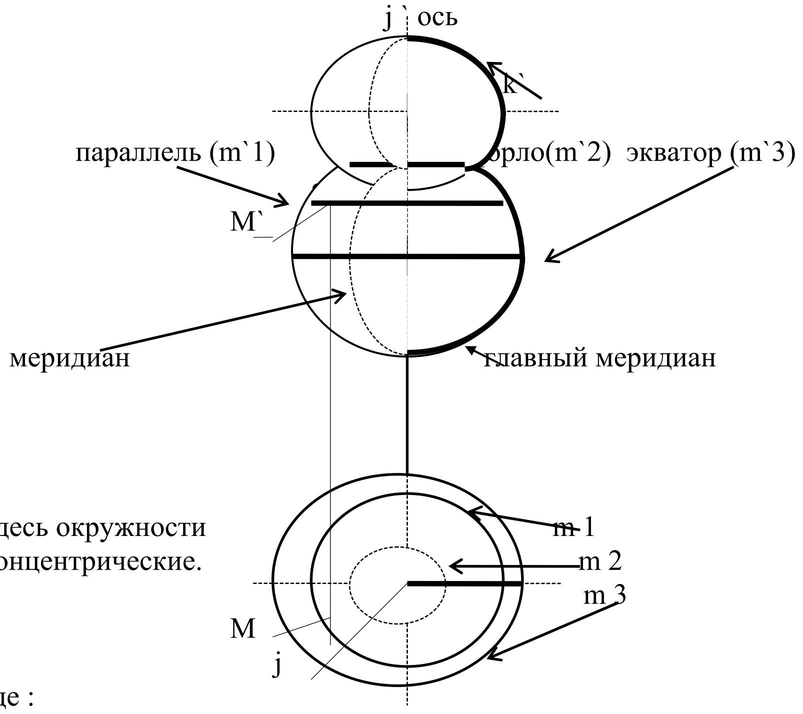
Образующая k лежит на одном из меридианов.

Меридиан расположенный во фронтальной плоскости и проектирующийся на фронтальную плоскость в натуральную величину называется главным меридианом.

Для построения главного меридиана образующую k вращают до совпадения с фронтальной плоскостью.

Если необходимо построить горизонтальную проекцию точки М принадлежащей поверхности, то достаточно провести через точку М` параллель m`1.

и найти ее горизонтальную проекцию m 1 на которой будет лежать М .



где :

m` , m ,   j` , j , M`, M,

k` , k соответственно, фронтальные и горизонтальные проекции.

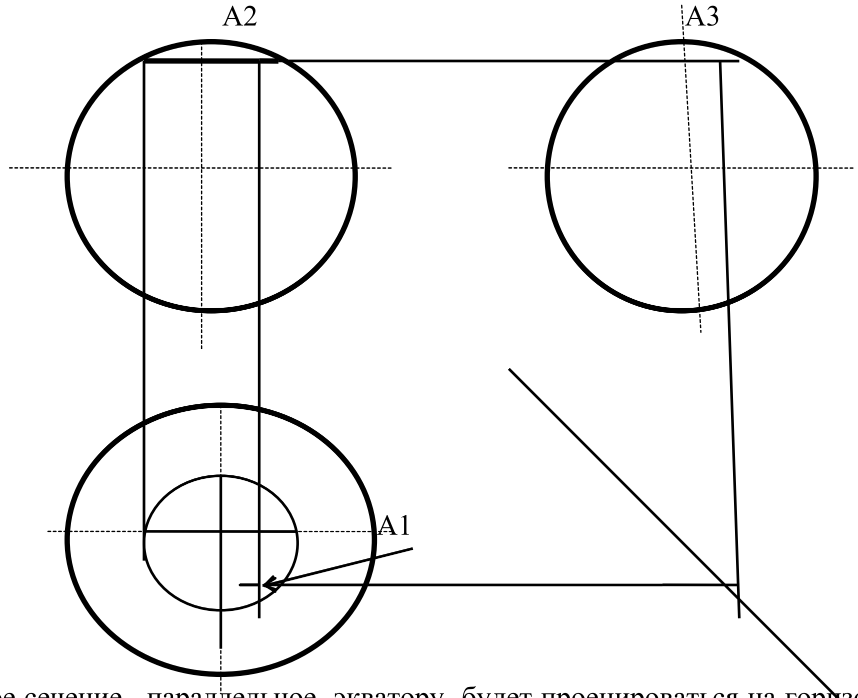
К поверхностям вращения относится **сфера** (тело - шар).

Сфера может быть образована вращением окружности вокруг диаметра.

$\Phi \{ m (m , j ; m \wedge j \subset \Gamma ; C\, m \subset j)(m\, i = m \varnothing j)\}$.

Проецируется на все плоскости ввиде равных окружностей.

Экватор шара на горизонтальную плоскость проецируется ввиде круга, а на фронтальную плоскость ввиде прямой линии параллельной оси X.



Всякое сечение, параллельное экватору будет проецироваться на горизонтальную плоскость проекций ввиде окружности.

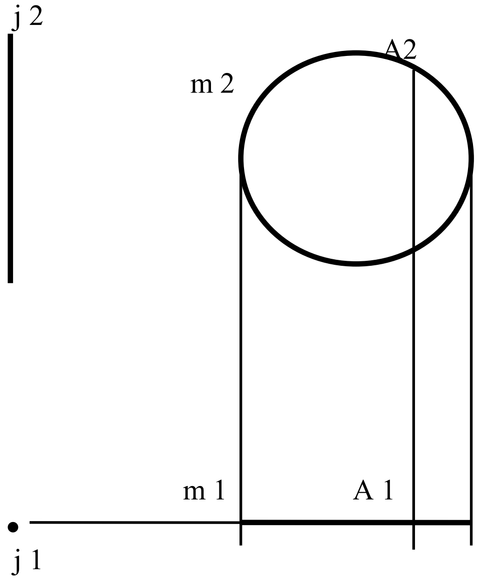
Воспользуемся этим для нахождения проекций точки А находящейся на поверхности сферы.

ТОР - поверхность вращения часто встречаемая в деталях машин.

Тор получается вращением окружности вокруг оси, расположенной в плоскости окружности, но не проходящей через ее центр.

Торовую поверхность вы видите на демонстрируемой модели. Это открытый тор. Окружность при вращении не пресекает ось и такой тор представляет собой кольцо.

Изобразим его основной чертеж.



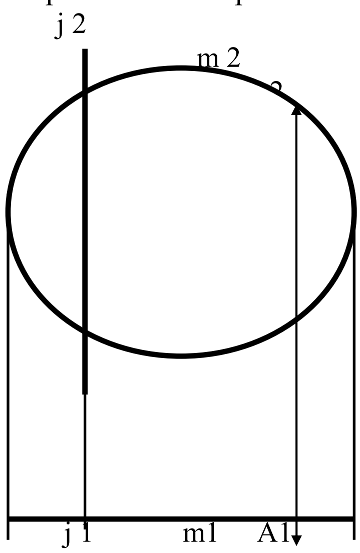
Запишем формулу этой поверхности

$\Phi\{m(j , m ; m \subset \Gamma \supset j; m \not\subset j)(m i = m \varnothing j)\}$.

Тор бывает закрытым. Это случай когда окружность касается оси вращения или пересекает ее. Образно эту поверхность можно представить ввиде яблока.

Формула этой поверхности $\Phi \ \{ m (m, j, \ m \subset \Sigma \supset j; m \cap j) (mi = m \varnothing j)\}$.

Произвольная прямая пересекает тор в четырех точках. В аналитической геометрии доказывается , что тор это алгебраическая поверхность четвертого порядка.



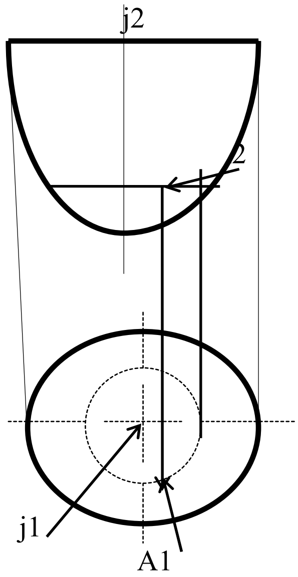
Коротко остановимся на *поверхностях вращения второго порядка*.

К ним относится *эллипсоид вращения, образующийся вращением эллипса вокруг его оси.* В зависимости от того какая ось эллипса выбрана осью вращения получаем *сжатый или вытянутый эллипсоид вращения.*

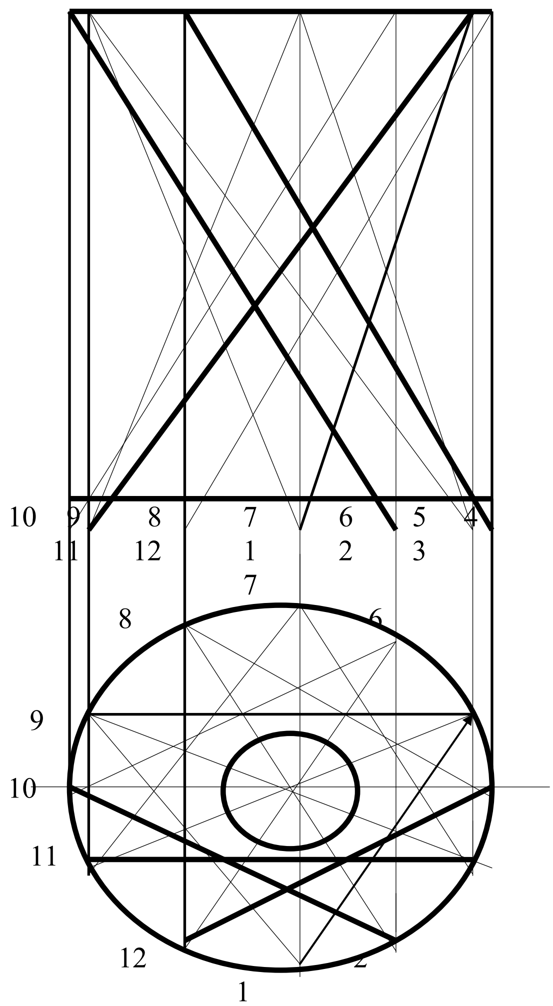
Вы уже освоили построение эллипса по двум заданным осям, теперь попробуйте изобразить в тетради основной чертеж эллипсоида вращения.

Хочу обратит ваше внимание, что в частном случае эллипс превращается в окружность , а эллипсоид в сферу.

ПАРАБОЛОИД ВРАЩЕНИЯ ОБРАЗУЕТСЯ ВРАЩЕНИЕМ ПАРАБОЛЫ ВОКРУГ ЕЕ ОСИ OZ .



ОДНОПОЛОСТНЫЙ ГИПЕРБОЛОИД ВРАЩЕНИЯ МОЖЕТ БЫТЬ ОБРАЗОВАН ВРАЩЕНИЕМ ГИПЕРБОЛЫ ВОКРУГ ЕЕ МНИМОЙ ОСИ OZ.



ДВУПОЛОСТНЫЙ ГИПЕРБОЛОИД ВРАЩЕНИЯ ОБРАЗУЕТСЯ ВРАЩЕНИЕМ ГИПЕРБОЛЫ ВОКРУГ ЕЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ .

В отличие от однополостного он не является одновременно и линейчатой поверхностью. Он не может быть образован движением прямой.

Комплексный чертеж двуполостного гиперболоида прошу построить самостоятельно.

Винтовые поверхности.

Винтовой поверхностью называется поверхность, которая описывается образующей при ее винтовом движении.

Образующие могут быть как *кривыми так и прямыми линиями.*

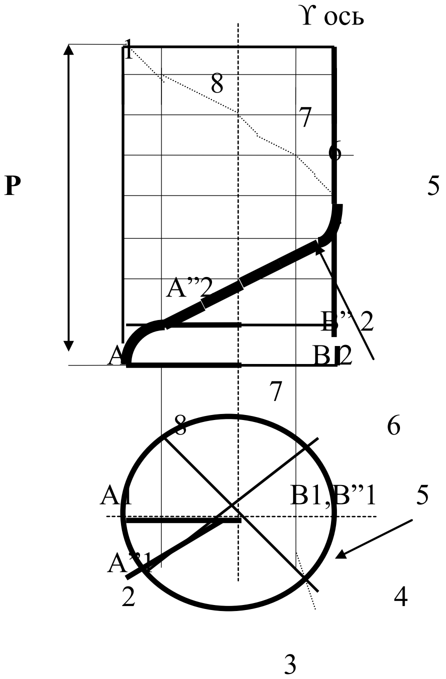
Прямые линии обычно называются *винтовыми параллелями.*

Расстояние между винтовыми параллелями называют *шагом винтовой поверхности.* Все линейчатые винтовые поверхности называют *ГЕЛИКОЙДАМИ.*

Выделение этих поверхностей в самостоятельную *группу связано с их значением в технике.*

Прежде чем перейти к их рассмотрению давайте вспомним вторую лекцию, мы говорили о винтовой линии - ГЕЛИСЕ.

Если на поверхности прямого кругового цилиндра карандашом зафиксировать точку , а затем начать вращать цилиндр, одновременно равномерно перемещая карандаш вдоль оси цилиндра , то острие карандаша опишет пространственную кривую называемую *цилиндрической винтовой линией*. Такую цилиндрическую винтовую линию еще называют *гелисой.*



ν - винтовая цилиндрическая линия постоянного шага (Р).

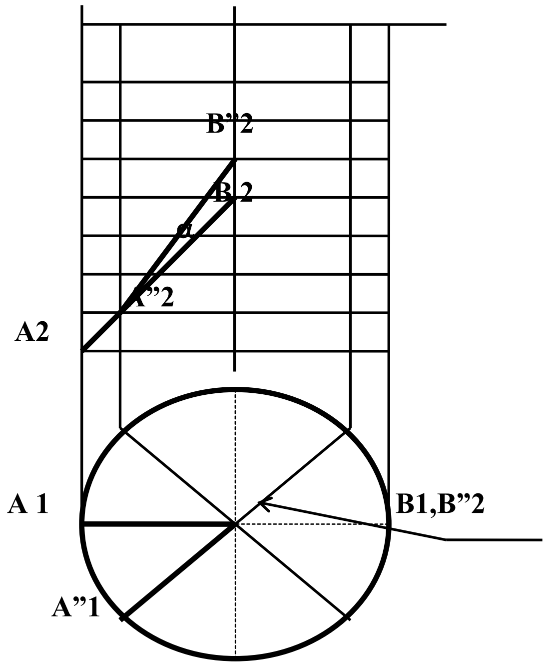
Ω - цилиндрическая поверхность

Ось цилиндрической поверхности будет осью винтовой линии, а радиус поверхности радиусом винтовой линии. Величину Р перемещения точки в направлении оси , соответствующему одному ее обороту вокруг оси, называют ***шагом винтовой линии***.

Цилиндрическая винтовая линия вполне определяется радиусом, шагом и ходом.

Теперь представте себе что по гелисе как по направляющей скользит отрезок прямой пересекающей ось цилиндра. Пусть отрезок прямой АВ пересекает ось j под прямым углом.

Скользя по неподвижной винтовой линии отрезок АВ опишет поверхность называемую **прямым закрытым геликоидом**. Эта поверхность может быть отнесена еще и к коноидам.
Значительно чаще встречается в технике поверхность **закрытого косого геликоида.**

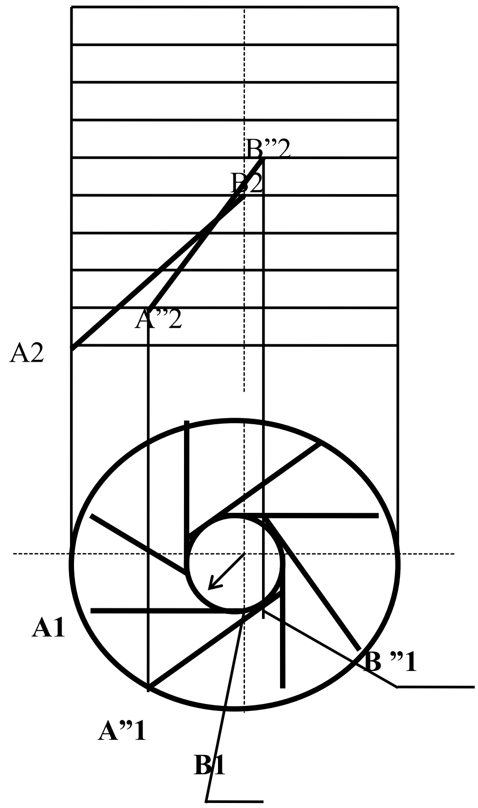


Этот геликоид задан винтовой линией , шагом, диаметром, осью винтовой поверхности и образующей наклоненной к оси под углом α .
Для построения витка геликоида выполним следующие построения.
Разделим горизонтальную проекцию винтовой линии на 8 частей.
Когда точка А перемещаясь по винтовой линии перейдет в порложение А" повернувшись на 1/8 оборота, точка В переместиться по оси в положение В". Последовательно перемещая точку А по винтовой линии и соединяя ее с положением точки В на оси прямыми линиями получим каркас винтовой поверхности.
Посторения прошу зарисовать с доски в аудитории.

Косой открытый геликоид.

Название "косой" связано с тем, что угол между осью и образующей не равен прямому. "Открытый" означает, что образующая с осью скрещивается.
Пусть в первоначальном положении образующая АВ паралельна пфронтальной плоскости проекций (П2). В точке А образующая пересекается с винтовой направляющей. Угол наклона образующей α с осью J проецируется на плоскость П2 без искажений.

Через какую бы точку образующей не проходила вторая направляющая , кратчайшее растояние между образующей и осью останется постоянным, поэтому при винтоввом движении образующая будет касаться цилиндра радиуса R, равного этому расстоянию.
Возьмем точку В образующей в месте ее касания цилиндрической поверхности. Эта точка опишет винтовую линию радиуса R , того же шага , что и винтовая линия (гелиса.).
Ее можно принять за вторую направляющую геликоида.



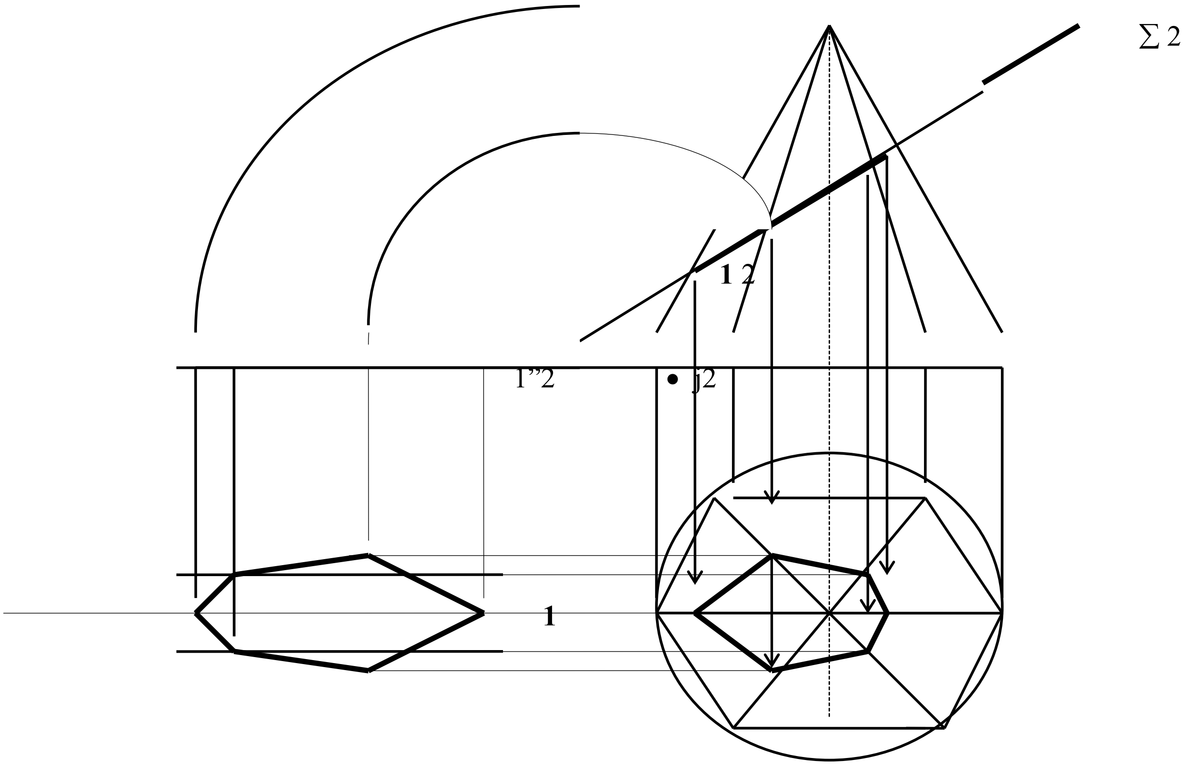
Для построения эпюра геликоида большая окружность на плоскости П1 разделина на 8 частей, начиная от точки А1, на то же число частей разделена внутренняя меньшая окружность начиная от точки В1.

Описанным ране приемом сторим фронтальные проекциибеих винтовых линий.

Пересечение поверхностей геометрических тел плоскостями.

Сечение гранных тел проецирующими плоскостями.

При пересечении поверхностей тел проецирующими плоскостями, одна проекция сечения совпадает с проекцией проецирующей плоскости.
Рассмотрим чертеж шестиугольной призмы рассеченной фронтально проецирующей плоскостью ∑. Как уже отмечалось, фронтальная проекция сечения совпадает со следом плоскости ∑ 2. Горизонтальную проекцию сечения можно построить спроектировав точки принадлежащие сечению на соответствующие проекции ребер. Для примера см. точку 1.



Для построения натурального размера сечения используем **метод совмещения с** горизонтальной **плоскостью** проекций.
Для совмещения фигуры сечения находящейся в проецирующей плоскости необходимо выполнить одно вращение. Ось вращения j проведем через точку пересечения проекции ∑2 с осью О Х. (Ось может проходить и через другую точку лежащую на следе плоскости.)

Проведем фронтальные проекции траекторий движения точек фигуры сечения. Новое фронтальное положение точки 1 это 1”2. Фронтальная проекция фигуры сечения стала параллельна оси ОХ и перпендикулярна линиям проекционной связи.
На горизонтальную плоскость фигура сечения спроектируется теперь в натуральную величину. Построим горизонтальную проекцию фигуры сечения на пересечении линий проекционной связи.
Причем, если ось вращения перпендикулярна плоскости П2, то фронтальные **проекции траекторий** точек фигуры сечения будут *представлять собой окружность, а горизонтальные - отрезки прямой .*

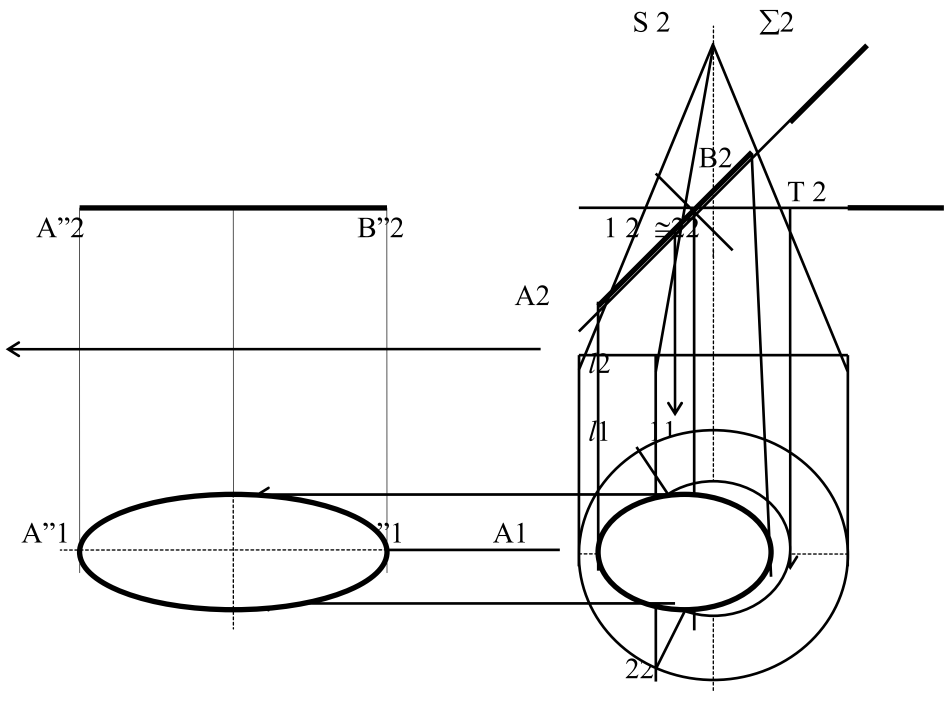
Сечение тел вращения.

Рассмотрим на примере конуса. Конус может иметь в сечении пять различных фигур.
Треугольник - если секущая плоскость пересекает конус через вершину по двум образующим.

Окружность - если плоскость пересекает конус параллельно основанию (перпендикулярно оси).
Эллипс - если плоскость пересекает все образующие под некоторым углом.
Параболу - если плоскость параллельна одной из образующих конуса.
Гиперболу - если плоскость параллельна оси или двум образующим конуса.

Пусть конус рассекается некоторой плоскостью Σ занимающей фронтально проецирующее положение в пространстве.
Плоскость пересекает все образующие конуса под углом.
Фигура сечения эллипс.
Эллипс строится по восьми точкам. Построения начинаем с определения большой и малой осей .
На фронтальной проекции ось совпадает со следом плоскости $\Sigma 2$.
Спроецируем две крайние точки принадлежащие большой оси эллипса на горизонтальную проекцию конуса. Обратите внимание, что эти точки лежат на очерковых образующих конуса.
Для нахождения малой оси разделим на фронтальную проекцию большой оси АВ на две равные части. Деление произведем циркулем.
Полученная точка это малая ось, которая занимает проецирующее положение относительно плоскости П2. Для определения ее горизонтальной проекции проведем через *эту точку* плоскость Т.
Плоскость Т (см. рисунок) рассекает конус по окружности радиус которой легко замерить от оси конуса до его очерковой образующей .
Построим горизонтальную проекцию этой окружности. Именно ей принадлежат крайние две точки малой оси эллипса. Отметим эти точки.
Таким образом у нас на горизонтальной проекции есть четыре точки для проведения горизонтальной проекции эллипса.
Чтобы задать еще четыре точки можно воспользоваться образующими эллипса. Для примера проведем образующую L и возьмем на ней точки 1 и 2.

Можно применить метод дополнительных секущих плоскостей, как мы только что сделали введя плоскость Т. Решите сами. Чтобы не затемнять чертеж на доске не будем строить еще две точки. А в тетради можете их построить.



Давайте определим натуральную величину фигуры сечения методом плоскопараллельного перемещения.

Этот простой метод может вам потребоваться при выполнении домашних эпюров и позволит более рационально скомпоновать чертеж.

Так как фигура сечения занимает проецирующее положение, для нахождения натуральной величины достаточно сделать только одно плоскопараллельное перемещение.

На форнтальной проекции фигура сечения представляет собой *отрезок* прямой. Будем перемещать его по произвольной траектории и поставим его в положение параллельное оси ОХ. Следовательно плоскость фигуры сечения займет положение параллельное плоскости П 1.

Единственным условием нашего перемещения будет являться неизменность длины самого *отрезка* и неизменность соотношения частей самого отрезка.

На доске эти построения выполнены.

Теперь построим горизонтальную проекцию фигуры сечения в новом положении. Для этого проведем линии проекционной связи.

Здесь линии проекционной связи проведены только между проекциями большой и малой осей эллипса. Вы же в тетради достройте все восемь точек.

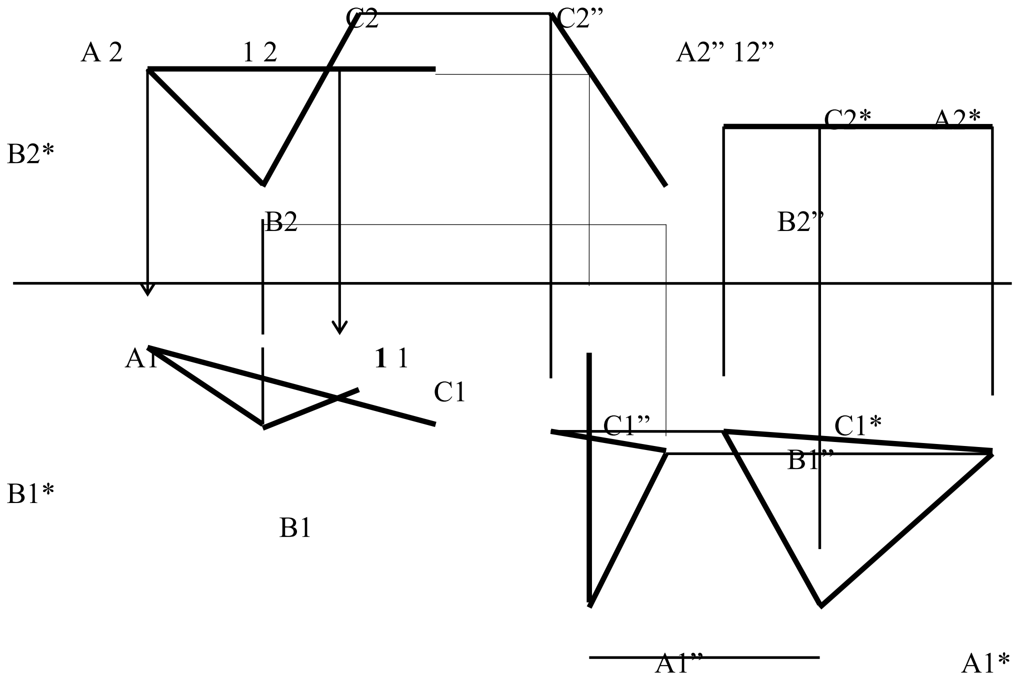
Обращаю внимание на следующее . На фронтальной проекции длина отрезка в который спроектировалась фигура сечения на плоскость П 2, в старом и новом положении не изменилась.

На плоскости П 1 мы получили в новом положении проекцию равную натуральной величине фигуры сечения.

Для закрепления этого метода давайте найдем натуральную величину плоской фигуры общего положения. Для этого нам потребуется два плоскопараллельных перемещения.

1) Проведем фронталь А,1. Построения начнем с фронтальной проекции фронтали.
2) В результате первого плоскопараллельного перемещения горизонтальная проекция фронталь поставлена перпендикулярно оси ОХ. Фронталь заняла частное положение и на плоскость П2 спроектировалась в точку.

Фигура заданная пересекающимися прямыми АВ иВС спроектировалась в линию.



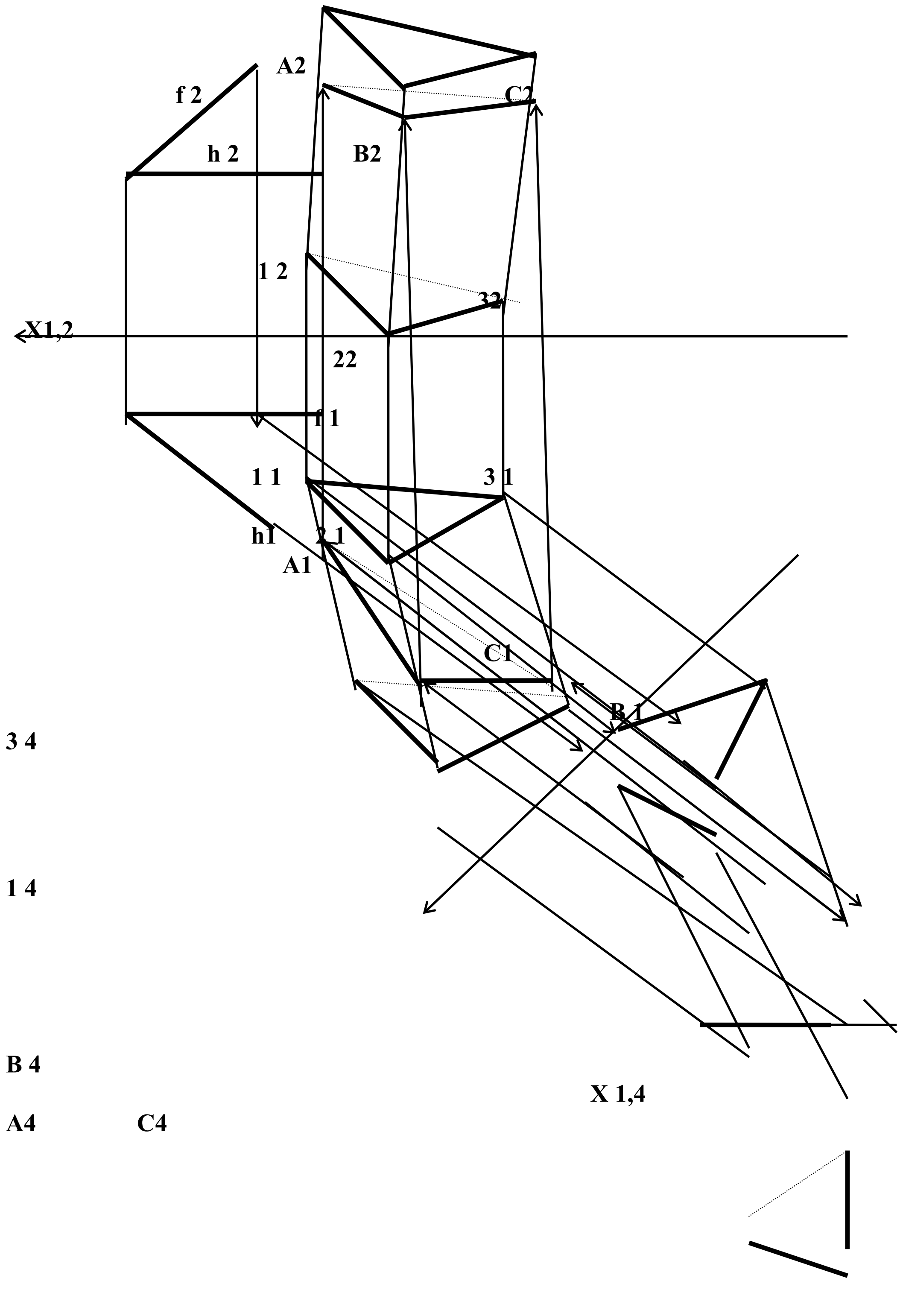
3) Проведем второе плоскопараллельное перемещение. На фронтальной плоскости проекцию фигуры A2”B2”C2” поставим в положение параллельное оси OX. В пространстве фигура ABC займет положение параллельное плоскости П1. Горизонтальная проекция A1*B1*C1* равна натуральной величине плоской фигуры ABC.

В результате построений мы получили не только проекцию равную натуральной величине плоской фигуры, но и величину плоского угла между прямыми AB и BC.

Пересечение поверхностей геометрических тел плоскостями.

Сечение гранных тел плоскостью общего положения

Плоскость задана пересекающимися прямыми (горизонталью и фронталью). Геометрическое тело - трехгранная призма.



Построить фигуру сечения можно используя различные, уже известные нам методы. Применим метод замены плоскостей проекций.

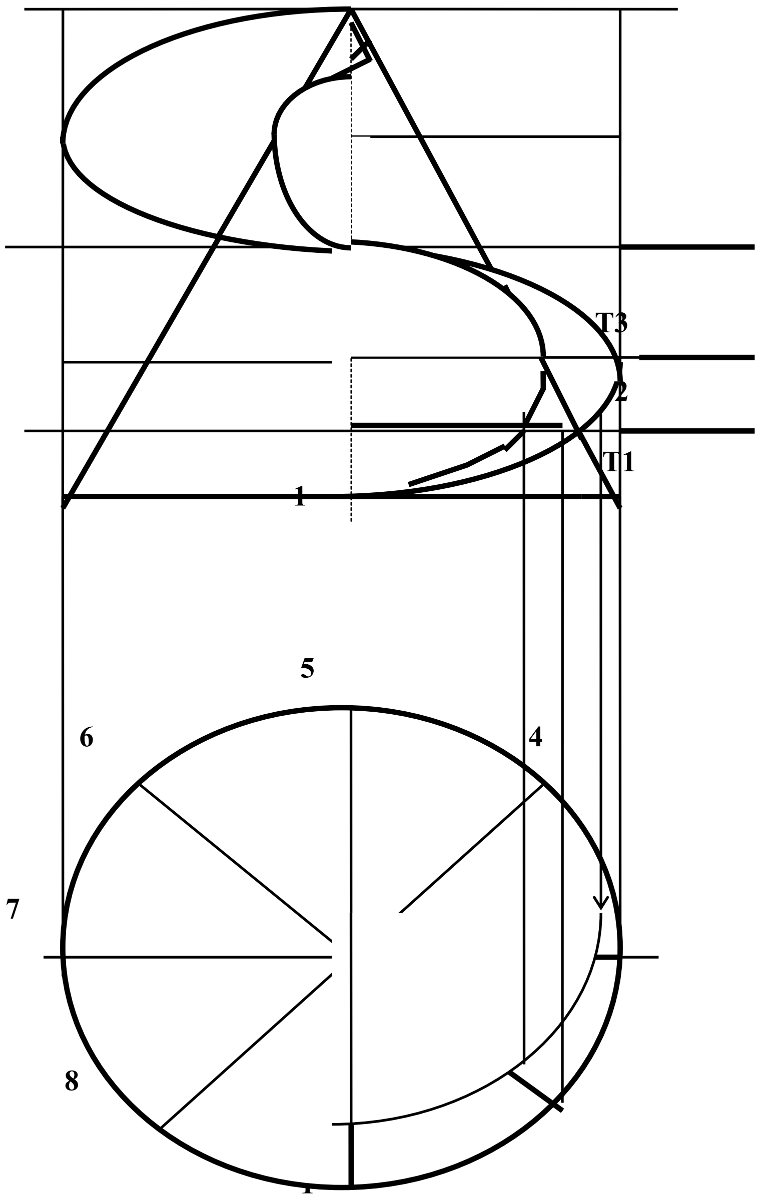
Выберем новую ось X1,4 так, чтобы она была перпендикулярна к горизонтальной проекции горизонтали. Тогда горизонталь на плоскость П4 спроектируется в точку, а плоскость заданная горизонталью и фронталью - в линию(т.е. займет проецирующее положение).
Построим на плоскости П4 проекцию призмы. Вспомним порядок построения на примере точки 1 принадлежащей призме.
От проекции 11 проведем линию проекционной связи перпендикулярно оси X 1,4. Циркулем замерим расстояние от оси X1,2 до проекции точки 1 2 и отложим равное ему расстояние по линии проекционной связи от оси X 1,4. Получим положение проекции точки
1 4 . После построения проекции призмы на плоскость П4, отметим точками A4 B4 C4 фигуру сечения призмы плоскостью. Эта фигура здесь очевидна, так как мы помним свойство проецирующих плоскостей. Теперь, чтобы получить фигуру сечения на плоскости П 1 и П 2 необходимо по линиям проекционной связи спроектировать точки ABC на соответствующие проекции ребер призмы.
Если перед нами стоит задача получить натуральную величину фигуры сечения , то мы можем сделать еще одну замену плоскости проекций , когда ось X 4,5 пройдет параллельно проекции A4 B4 C4.
Можно использовать метод плоскопараллельного переноса или повернуть вокруг оси перпендикулярной плоскости П4 так, чтобы фигура сечения стала параллельна горизонтальной плоскости проекций. Для это надо вспомнить прошлую лекцию.

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ

Пересечение двух поверхностей находят :
1) способом вспомогательных секущих плоскостей,
2) способом сфер или вспомогательных шаровых поверхностей.

В первую очередь находят характерные (опорные) точки искомой линии пересечения. К таким точкам можно отнести точки которые лежат на проекциях контурных линий поверхности, точки расположенные на главном меридиане, в экваторе шара,крайние точки справа и слева, наивысшие и наинизшие точки. Иные точки принято называть промежуточными.
Построив линию пересечения двух поверхностей необходимо определить видимость. Невидимые части необходимо показывать штриховой линией.
Если одна из поверхностей имеет прямолинейные образующие, то линию пересечения можно найти нанося на поверхность ряд образующих, определив их точки пересечения с другой поверхностью.
Затем плавной кривой соединим эти точки.

Построим линию пресечения конической поверхности и соосного с ней прямого геликойда. Каждую из этих поверхностей мы уже рассматривали. Коническую поверхность неоднократно рассекали плоскостью и знаем какая фигура сечения будет в зависимости от положения секущей плоскости.
Вспомним как образовывалась поверхность геликоида :
Скользя по неподвижной винтовой линии отрезок AB перпендикулярный к оси j опишет поверхность называемую прямым закрытым геликоидом. Эта поверхность может быть отнесена еще и к коноидам.
Давайте определим такой порядок построения линии пересечения поверхностей. Будем проводить в геликойде образующие и определять в какой точке каждая из образующих геликойда пересекла коническую поверхность.



Для определения точки пересечения каждую из образующих заключим во вспомогательную плоскость, таким образом чтобы фигурой сечения плоскости и конуса была окружность.
Точка пересечения окружности с образующей будет принадлежать одновременно трем поверхностям - вспомогательной плоскости, конусу и геликойду.   Построим обе проекции этой точки. Они лежат на образующей геликойда.

Построение образующих геликойда начнем с горизонтальной проекции. Для этого окружность разобьем на восемь частей.
Вспомним как мы это уже делали. Найдем фронтальную проекцию образующей воспользовавшись винтовой линией - гелисой.
Заключим образующую во фронтальнопроецирующую плоскость Т, которая рассечет конус параллельно основанию. Радиус окружности можно замерить от оси до очерковой образующей конуса.
Построим эту окружность на горизонтальной проекции. Она пересечет образующую геликойда в некоторой точке которая будет принадлежать искомой фигуре сечения. Найдем фронтальную проекцию этой точки.
Далее аналогично.

Пересечение двух поверхностей способом сфер или вспомогательных шаровых поверхностей.

Для построения линии пересечения некоторых поверхностей не рационально использовать плоскости в качестве вспомогательных секущих поверхностей.

Если пересекаются две поверхности вращения общего вида с пересекающимися осями и общей плоскостью симметрии.

Запишем такую теорему:

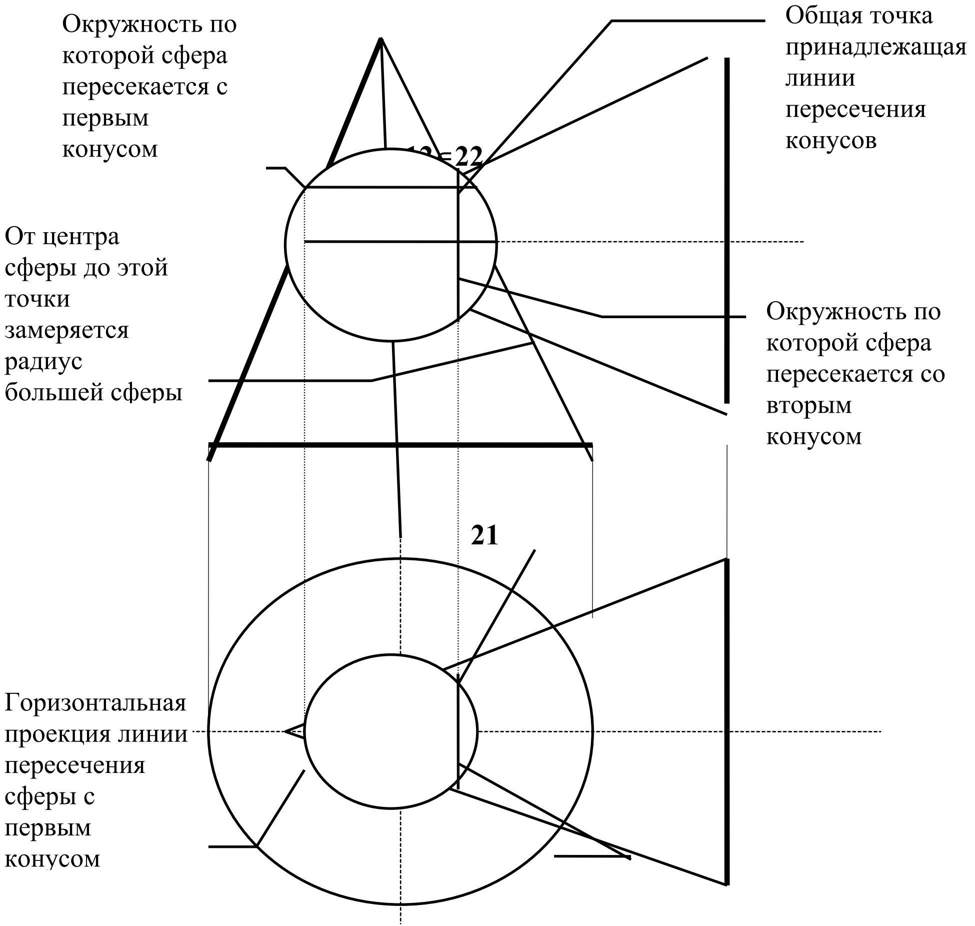
Если центр секущей сферы находится на оси поверхности вращения , то сфера пересечет данную поверхность по окружностям.

Рассмотрим применение метода на конкретном примере.

Пусть пресекаются две поверхности вращения - два прямых круговых конуса. (Эти поверхности выбраны из-за простоты построения чертежа на доске. Конус мог пересекаться с тором, цилиндром или поверхность вращения общего вида могла бы пересекаться с цилиндром. Во всех этих случаях и всегда когда пересекаются две поверхности вращения с пересекающимися осями можно применить этот метод.)

В рассматриваемом случае конусы с пересекающимися осями лежат в плоскости параллельной фронтальной плоскости проекций.

ТОЧКУ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ОСЕЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРИНИМАЕМ ЗА ЦЕНТР ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ СФЕР.



Если сфера соосна с каждой из поверхностей, то она пересечет их по окружностям плоскости которых перпендикулярны осям поверхностей соответственно. **ЭТИ ОКРУЖНОСТИ ПЕРЕСЕКАЯСЬ ДАЮТ ТОЧКИ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ.** В общем случае таких точек будет четыре.

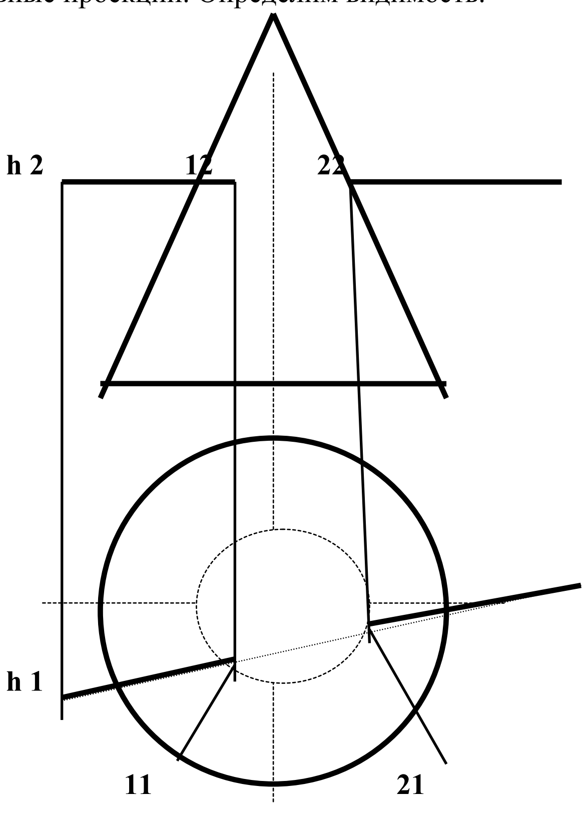
На чертеже показано построение точек 1 и 2.

Проведя множество сфер получим сколько угодно точек принадлежащих линии пересечения поверхностей.

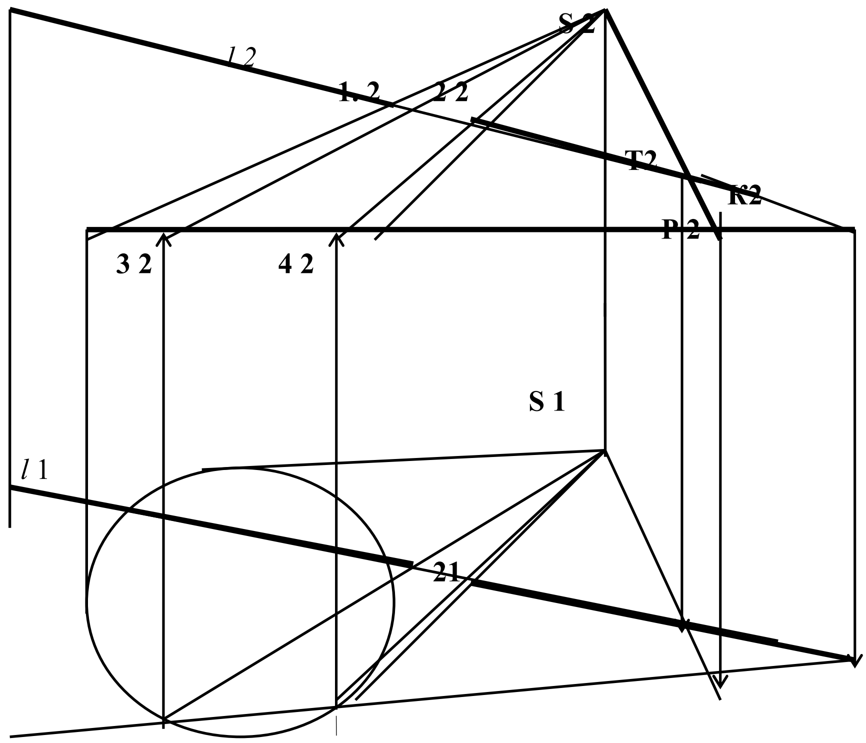
Чтобы избежать лишних построений, надо сразу определить радиусы наибольшей и наименьшей сфер.
Для этого отметим точки пересечения очерковых образующих поверхностей.
Отрезок от центра сферы до проекции наиболее удаленной точки на линии пересечения поверхностей - будет радиусом наибольшей сферы.
Для определения радиуса наименьшей сферы из центра сферы O проводят две нормали к очерковым образующим данных поверхностей. Точки пересечения нормалей с очерковыми образующими дадут нам точки N и N*. Наибольший из отрезков ON или ON* даст нам радиус наименьшей сферы. Между этими сферами проводят необходимое количество вспомогательных сфер.
Вопрос видимости здесь решается просто. Обычным способом.
Достроим линию пересечения поверхностей.

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ С ПОВЕРХНОСТЬЮ.

Нахождение точек пересечения прямой линии с поверхностью производится следующим методом.
Через заданную прямую проводят вспомогательную поверхность.
Находят линию пересечения вспомогательной поверхности с заданной поверхностью.
Определяют общие точки прямой с линией пересечения поверхностей. Это и будут искомые точки.
Затем определяют видимость.
В каждом отдельном случае вспомогательную секущую поверхность выбирают так, чтобы она простейшим образом пресекалась с заданной поверхностью.
Например коническая поверхность пересекается горизонтальной прямой.
Заключим эту прямую в плоскость уровня горизонтальную плоскость.
Эта плоскость пресечет конус по окружности , которая на фронтальную плоскость проекций спроектируется в прямую линию, а на горизонтальную в окружность.
Замерим радиус этой окружности от оси до очерковой образующей конуса в месте прохождения секущей плоскости на фронтальной проекции. Проведем эту окружность на горизонтальной проекции. Определим точки пересечения горизонтальной проекции горизонтали с этой окружностью.
Найдем их фронтальные проекции. Определим видимость.



Рассмотрим аналогичную задачу, но более сложный случай, когда плоскость частного положения в качестве дополнительной секущей провести нельзя.



Т 1

К 1

Р 1

3 1 4 1

Проведем линию через вершину конуса и пересекающую заданную прямую. Эти две линии зададут нам плоскость общего положения пересекающую поверхность конуса. Построение начнем с фронтальной проекции. Проведем проекцию S2 T2 и продлим ее до пересечения с проекцией прямой проходящей через основание конуса в точке P2.

Продлим также проекцию прямой l 2 до пересечения с проекцией прямой проходящей через основание конуса в точке К 2.

Переходим к построениям на горизонтальной плоскости проекций.

По линии проекционной связи на проекции прямой l 1 найдем Т 1.

На продолжении S1 T1 на линии проекционной связи найдем положение Р 1.

Так как точка К принадлежит прямой L , то найдем ее проекцию К 1 по линии проекционной связи на продолжении l 1.

Теперь у нас есть две точки Р 1 и К 1 для того, чтобы провести линию проходящую через основание конуса и одновременно принадлежащую плоскости в которую мы заключили прямую L.

Проведем горизонтальную проекцию этой прямой, которая пересечет основание конуса в точках 31 и 41.

Соединив проекции этих точек с вершиной S 1 получим проекцию фигуры сечения .

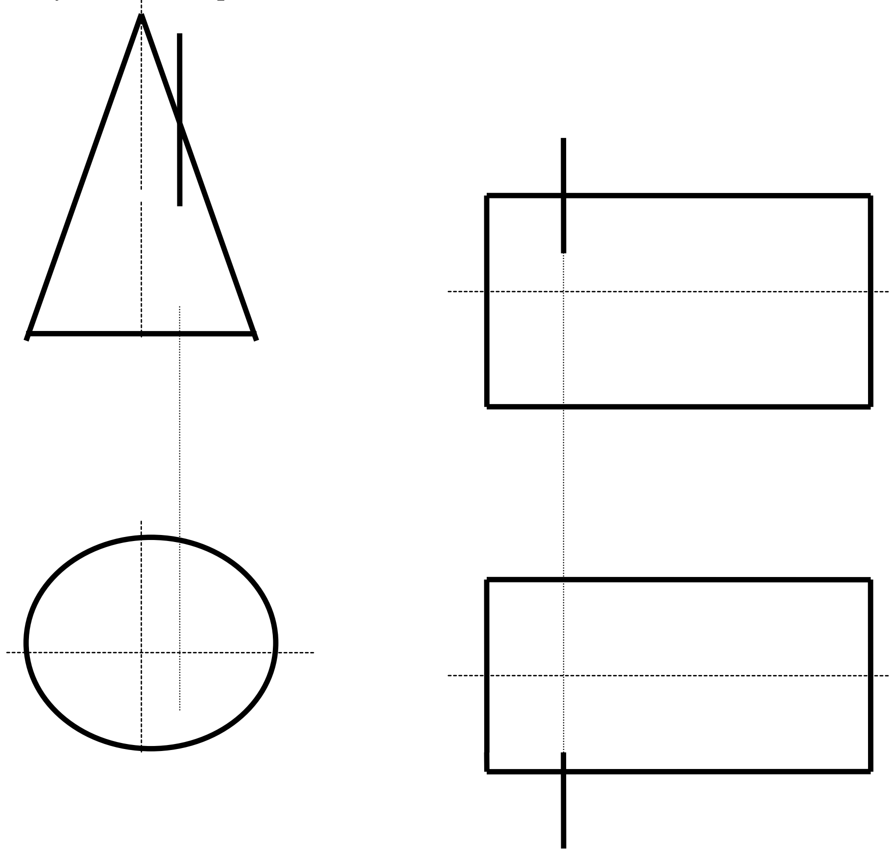
Там где прямая l 1 пересечет фигуру сечения будут точки 11 и 21. Это горизонтальные проекции точек пересечения прямой L с поверхностью конуса.

Найдем фронтальные проекции этих точек. Для этого определим положение точек 32 и 42 и соединим их с вершиной S2. Остальное очевидно.

Пересечение прямой и поверхности.

(Повторение и продолжение).

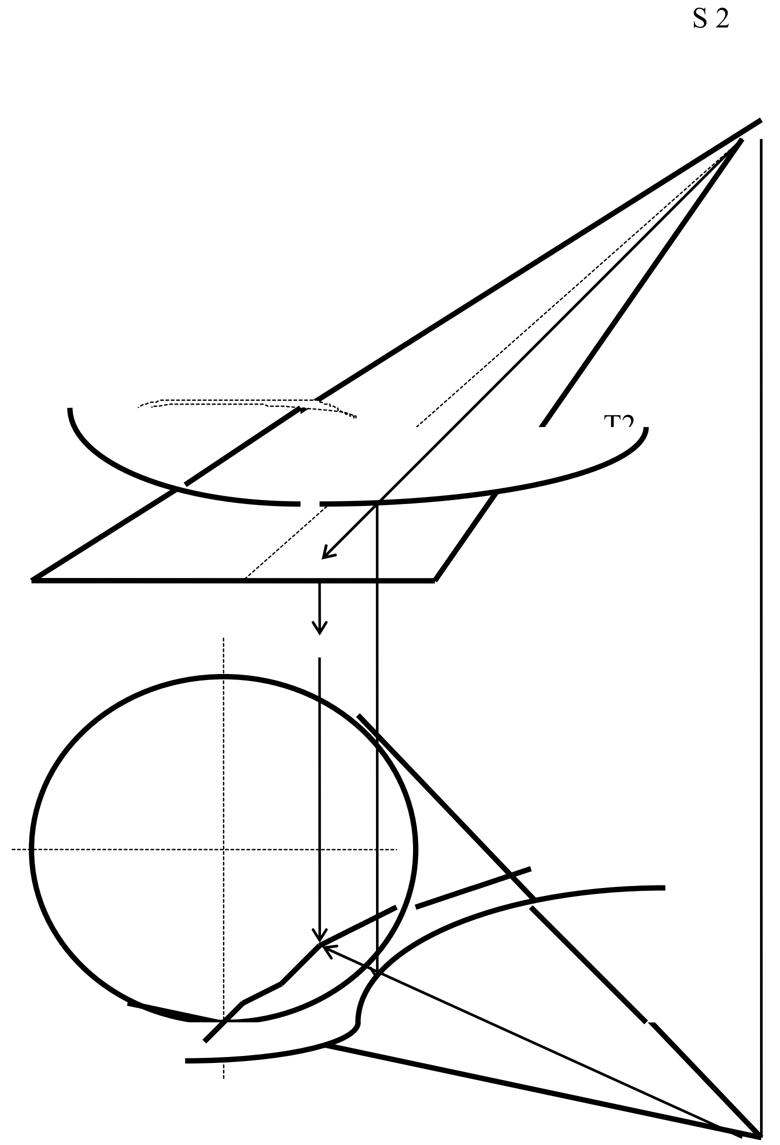
Для контроля усвоения материала хочу предложить выполнить самостоятельно две простые задачи на пересечение прямых частного положения с поверхностями конуса и цилиндра.



Чтобы построить точки пересечения прямой с конической или цилиндрической поверхностью, следует заключить прямую в плоскость, проходящую через вершину поверхности (собственную или несобственную), найти линию пересечения плоскости и поверхности, а затем точки , в которых эти линии пересекаются с заданной прямой.

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КРИВОЙ ЛИНИИ С ПОВЕРХНОСТЬЮ.

Рассмотрим на примере пересечения кривой линии с поверхностью конуса.
На фронтальной проекции видно, что кривая L не может пересечь поверхность конуса с вершиной S левее точки A2 и правее B2.
Глядя на горизонтальную проекцию можно утверждать , что пересечение может находится в пределах ограниченных точками C 1 и D 1.
Определим как горизонтальные так и фронтальные проекции этих точек и рассмотрев их станем утверждать, что пересечение происходит между точками A и D. Если кто затрудняется прийти к такому выводу, то задавайте вопрос и я дополнительно поясню.
Далее воспользуемся дополнительным центральным проецированием.
Спроецируем коническую поверхность конуса S и кривую в пределах
AD на плоскость T.



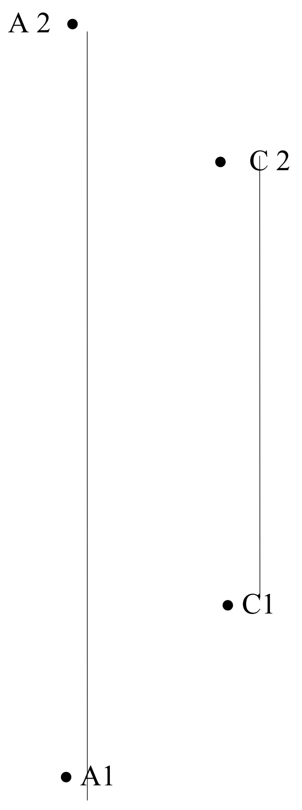
Проекцией поверхности будет окружность, а проекцией кривой кривая со штрихом. ,то линии пересекаются в точках К и М.
Найдем горизонтальные проекции точек К и М .Соединив их с вершиной S получим горизонтальные проекции точек пересечения кривой с поверхностью. Найдем на фронтальной проекции этой кривой. соответствующие проекции точек пересечения.

. ..

Метрическая задача.

Задача очень простая. Мы сможем решить ее различными известными нам методами. Я покажу вам решение самым первым методом - треугольника. Вы же попробуйте получить решение заменой плоскости проекций и методом вращения.

Построить основной чертеж сферы с центром в точке С, если точка А принадлежит ее поверхности.



Задача сводится к нахождению натуральной величины отрезка АС.
Если мы возьмем превышение по оси Z токи А2 над тоской С2 и отложим его под прямым углом к проекции А1С1, то диагональ полученного прямоугольного треугольника будет равна натуральной величине отрезка или радиусу сферы.